

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Análise Comparativa e de Desempenho de Elementos Finitos de Placa

Autor: **José Renato Camargo de Carvalho**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Análise Comparativa e de Desempenho de Elementos Finitos de Placa

Autor: José Renato Camargo de Carvalho

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2004

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C253a Carvalho, José Renato Camargo de
 Análise comparativa e de desempenho de elementos
 finitos de placa / José Renato Camargo de Carvalho.
 –Campinas, SP: [s.n.], 2004.

 Orientador: Renato Pavanello.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

 1. Método dos elementos finitos. 2. Mecânica dos
sólidos. 3. Placas (Engenharia). 4. Teoria das estru-
turas. 5. Analise elástica (Engenharia). I. Pavanello,
Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Fa-
culdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Análise Comparativa e de Desempenho de Elementos Finitos de Placa

Autor: **José Renato Camargo de Carvalho**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

**Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
FEM/UNICAMP**

**Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
FEM/UNICAMP**

**Prof. Dr. Miguel Luiz Bucalem
Escola Politécnica/USP**

Campinas, 19 de Fevereiro de 2004.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Marina e Ximenes, que sempre me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos de minha vida.

Dedico também à Juliana, que me ajudou e me apoiou ao longo de todo este período, e ao meu irmão, Daniel, cuja amizade e companheirismo me são muito valiosos.

... de cada um, segundo suas capacidades, a cada um, segundo suas necessidades.

Marx e Engels

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

- Ao meu orientador, **Prof. Renato Pavanello**, pela dedicação, companheirismo e amizade durante este período em que trabalhamos juntos.
- Agradeço também ao Prof. Janito Vaqueiro Ferreira pelos ensinamentos valiosos em C++ e pela ajuda com o *MefLab++*.
- Ao Departamento de Mecânica Computacional pela infra-estrutura fornecida durante a realização deste trabalho.
- Agradeço aos colegas do DMC pelo companheirismo.
- À FAPESP pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Carvalho, José Renato Camargo de, *Análise Comparativa e de Desempenho de Elementos de Placa*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 146 p. Dissertação (Mestrado).

Elementos finitos de placa quadrilateral de 4 nós propostos pelos autores K. J. Bathe, T. Belytschko, T. J. R. Hughes e R. H. MacNeal, são apresentados e implementados computacionalmente. Tais autores foram escolhidos devido a sua importância nesta área de pesquisa, sendo dois destes elementos usados em programas comerciais (MSC/ NASTRAN e ADINA).

Em seguida, foi identificado, com base na literatura, um conjunto de testes padrão específico para elementos de placa. Os elementos foram então submetidos aos testes e seus desempenhos foram avaliados com relação à precisão e convergência. Os testes escolhidos buscavam verificar a existência de problemas descritos amplamente na literatura como travamento, modos espúrios, convergência e sensibilidade a distorção geométrica.

Os resultados obtidos com estas avaliações permitiram identificar características, limitações e qualidades de cada elemento, fornecendo subsídios para que o projetista possa escolher de forma consistente qual a tecnologia mais adequada para cada situação avaliada nos testes.

A implementação dos elementos, a análise dos seus respectivos desempenhos e a identificação de um conjunto de testes para elemento de placa formam uma base sólida para o desenvolvimento de novas técnicas em futuras pesquisas para este tipo de elemento.

A inexistência na literatura de uma análise comparativa e de desempenho de elementos de placa para um conjunto amplo de testes, a identificação do elemento mais adequado para os vários tipos de solicitações avaliadas e a formação de uma base sólida para futuras pesquisas foram as principais motivações deste trabalho.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos, Elemento de Placa, Análise Linear Estática, Análise Comparativa.

Abstract

Carvalho, José Renato Camargo de, *Análise Comparativa e de Desempenho de Elementos de Placa*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004, 146 p. Dissertação (Mestrado).

Four node quadrilateral plate finite elements from K. J. Bathe, T. Belytschko, T. J. R. Hughes and R. H. MacNeal are studied and computationally implemented. These authors have been chosen due to their importance in this research area, and besides, two of these elements are used in commercial programs (MSC/ NASTRAN and ADINA).

A set of test problems for plate elements has been identified. The elements were, then, submitted to these tests and their performances were evaluated regarding precision, convergence and computational cost. The chosen tests had the objective of checking the existence of the problems described in the literature, such as "shear locking", "spurious modes", convergence and geometrical distortion sensibility.

The results obtained with these evaluations allowed to identify the characteristics, limitations and qualities of each element. In consequence, it is possible to point out the most adequate element for each specific test situation evaluated.

The computational implementation of the elements, the analysis of their performance and the definition of a set of tests for plate elements formed a solid base for future researches.

The inexistence in the literature of a performance and comparative analysis of these important plate elements for a wide set of tests, the identification of the most adequate element for each situation and the formation of a solid base for future studies on this type of element were the main motivations of this work.

Key words: Finite Element Method, Plate Element, Linear Static Analysis, Comparative Analysis.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Escopo e Motivação	1
1.2	Retrospectiva Histórica e Revisão Bibliográfica	3
1.3	Objetivos e Plano da Dissertação	7
2	Teoria de Placas	9
2.1	Teoria Clássica de Placa Delgada - Kirchhoff	9
2.1.1	Equações Diferenciais de Kirchhoff	10
2.1.2	Condições de Contorno de Kirchhoff	17
2.2	Teoria de Placa Espessa - Reissner-Mindlin	19
2.2.1	Equações Diferenciais de Reissner-Mindlin	20
2.2.2	Condições de Contorno de Reissner-Mindlin	26
3	Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)	27
3.1	Derivação das Equações de Equilíbrio dos Elementos Finitos	27
3.2	Elementos de Placa de Reissner-Mindlin	31
3.3	Considerações sobre o Travamento	32
4	Formulação dos Elementos de Placa	35
4.1	Introdução	35
4.2	Elemento Baseado em Interpolação Mista Proposto por K. J. Bathe	36
4.2.1	Matriz de Rigidez - Flexão	37
4.2.2	Matriz de Rigidez - Cisalhamento	39
4.3	Elemento Isoparamétrico Proposto por T. J. R. Hughes	43

4.3.1	Matriz de Rigidez - Cisalhamento	45
4.4	Elemento baseado no Método de Modo de Kirchhoff Proposto por T. Belytschko	54
4.4.1	Matriz de Rigidez - Cisalhamento	64
4.5	Elemento baseado no Método de Deformação Assumida (QUAD4) Proposto por R. H. MacNeal	65
4.5.1	Matriz de Rigidez - Cisalhamento	65
4.6	Motivação da escolha do ponto médio para calcular as componentes de cisa- lhamento	69
5	Implementação Computacional	72
5.1	Introdução	72
5.2	Programação Orientada a Objetos	73
5.3	Obtendo um Modelo de Objeto	74
5.3.1	Análise Orientada a Objetos	75
5.3.2	Projeto Orientado a Objetos	76
6	Análise Comparativa e de Desempenho	81
6.1	Introdução	81
6.2	Patch Test	83
6.3	Teste da Placa Retangular	86
6.4	Teste da Viga Retilínea	96
6.5	Teste da Viga Curvilínea	98
6.6	Teste da Placa Circular	99
6.7	Teste de Autovalores	102
7	Conclusões e Sugestões de Continuidade	103
7.1	Conclusões	103
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	106
	Referências Bibliográficas	107

A	Derivação da Matriz de Flexibilidade Residual de Flexão	116
A.1	Matriz de Rigidez - Flexão	117
A.2	Matriz de Rigidez - Cisalhamento	119

Lista de Tabelas

6.1	Coordenadas dos nós do <i>Patch Test 1</i>	85
6.2	Coordenadas dos nós do <i>Patch Test 2</i>	86
6.3	Resumo das condições testadas.	87
6.4	Razão entre os lados $(b/a)=1$	89
6.5	Razão entre os lados $(b/a)=5$	92
6.6	Erro percentual médio por nível de refinamento de malha.	94
6.7	Elementos distorcidos geometricamente.	95
6.8	Resultados do teste da viga retilínea.	97
6.9	Resultados do teste da Viga Curvilínea.	99
6.10	Resultados do teste da placa circular.	100

Lista de Figuras

2.1	Forças internas na superfície mediana do elemento	10
2.2	Elemento tridimensional.	12
2.3	Secção antes e depois da deflexão.	14
2.4	Distorções angulares projetadas	15
2.5	Cinemática da Placa de Reissner-Mindlin.	23
4.1	Definição do vetor de deformação de cisalhamento nodal.	40
4.2	Dados geométricos para o elemento quadrilateral de 4 nós.	45
4.3	Definição do vetor nodal contendo as componentes das deformações cisalhantes.	45
4.4	Geometria do elemento de placa quadrilateral.	59
4.5	Geometria do elemento de placa do MacNeal.	66
4.6	Elemento de viga de 2 nós representando um cantilever.	70
5.1	Diagrama de herança entre as classes responsáveis pelo cálculo das funções de forma.	76
5.2	Diagrama de herança entre as classes que lidam com a parte geométrica dos elementos.	77
5.3	Diagrama das relações da classe <i>Quad4geoBathe</i>	78
5.4	Diagrama de herança da classe <i>PlateBathe</i>	78
5.5	Diagrama das relações da classe <i>PlateBathe</i> com as demais classes	79
5.6	Diagrama de herança entre as classes que lidam com a parte física do elemento.	79
5.7	Diagrama da class <i>PhyElement</i>	80
6.1	<i>Patch Test 1</i> para elementos de placa.	85

6.2	<i>Patch Test 2</i> para elementos de placa.	85
6.3	Placa retangular com malha de 16 elementos.	87
6.4	Resultados do Teste da Placa Retangular - Carga Concentrada - Razão entre os lados $(b/a)=1$	90
6.5	Resultados do Teste da Placa Retangular - Carga Uniforme - Razão entre os lados $(b/a)=1$	91
6.6	Resultados do Teste da Placa Retangular - Carga Concentrada - Razão entre os lados $(b/a)=5$	93
6.7	Resultados do Teste da Placa Retangular - Carga Uniforme - Razão entre os lados $(b/a)=5$	93
6.8	Malha para $1/4$ da placa com elementos distorcidos geometricamente, em que são aplicadas as condições de simetria.	95
6.9	Viga retilínea discretizada em 6 elementos com o mesmo volume: (a) Elementos retangulares (b) Elementos trapezoidais (c) Elementos inclinados.	97
6.10	Resultados do Teste da Viga Retilínea	98
6.11	Viga Curvilínea.	98
6.12	Malhas de Placa Circular. Somente um quadrante é discretizado devido a simetria.	100
6.13	Resultados do Teste da Placa Circular - Suporte Engastado	101
6.14	Resultados do Teste da Placa Circular - Suporte Simplesmente Apoiado	101
A.1	Posição dos pontos de integração para cálculo do cisalhamento	126

Lista de Símbolos

Letras latinas

A	área da superfície mediana da placa
$ABCD$	pontos de referência antes da deformação
$A'B'C'D'$	pontos de referência após a deformação
\mathbf{B}^b	matriz de deformação-deslocamento referente a flexão
\mathbf{B}^s	matriz de deformação-deslocamento referente ao cisalhamento
$\mathbf{B}^{(n)}$	matriz de deformação-deslocamento de um elemento
\mathbf{C}	matriz constitutiva do material
\mathbf{C}^b	matriz constitutiva do material para o cálculo da flexão
\mathbf{C}^s	matriz constitutiva do material para o cálculo do cisalhamento
\mathbf{d}	vetor de deslocamento nodal
D	rigidez flexural
e	coeficiente de deformação
\mathbf{e}	vetor unitário
E	módulo de elasticidade ou módulo de Young
U_e	energia de deformação exata teórica referente à flexão segundo a teoria de Kirchhoff
U_i	energia de deformação referente à flexão calculada para um elemento finito
\mathbf{f}^B	vetor das forças de volume externas aplicadas a um corpo
\mathbf{f}^{Sf}	vetor de forças por unidade de área aplicadas a um corpo
g	componente de deformação de cisalhamento
G	módulo de elasticidade de cisalhamento
h	espessura da placa
$\mathbf{H}^{(n)}$	matriz de funções de interpolação de um elemento
j	número de nós de um elemento
\mathbf{J}	jacobiano
\mathbf{K}	matriz de rigidez global
\mathbf{K}^b	matriz de rigidez referente ao efeito da flexão
\mathbf{K}^s	matriz de rigidez referente ao efeito do cisalhamento
k	fator de correção de cisalhamento
l_I	comprimento do lado I
\mathbf{m}	vetor do momento interno por unidade de comprimento
\mathbf{M}	vetor do momento externo por unidade de comprimento

N	funções de forma
n	índice que indica o número do elemento
\mathbf{p}	vetor de força externa com componentes em x , y e z por unidade de volume
\mathbf{P}^b	matriz de operação linear que define o modo de flexão da decomposição
\mathbf{P}^s	matriz de operação linear que define o modo de cisalhamento da decomposição
\mathbf{q}	vetor de força interna de cisalhamento por unidade de comprimento
\mathbf{r}_b	vetor global de cargas devido as forças de corpo
\mathbf{r}_c	vetor global das cargas concentradas aplicadas aos nós
\mathbf{r}_s	vetor global de cargas das forças superficiais
\mathbf{r}_i	vetor global de cargas das tensões iniciais
\mathbf{r}_c^i	vetor global das forças concentradas externas aplicadas a um corpo
S	superfícies externas do corpo
S_f	área na superfície de um corpo onde são aplicadas as forças
S_u	área que suporta o corpo
u	componente na direção x dos deslocamentos de um elemento
\mathbf{u}	vetor dos deslocamentos do corpo com as componentes em x , y e z
\mathbf{u}^{Su}	vetor de deslocamentos prescritos a um corpo
$\bar{\mathbf{u}}$	vetor de deslocamentos virtuais de um corpo
$\hat{\mathbf{u}}$	vetor de deslocamentos globais de todos os nós do elemento
v	componente na direção y dos deslocamentos de um elemento
w	componente na direção z dos deslocamentos de um elemento
w^k	deslocamentos transversais correspondentes a configuração de kirchhoff
\mathbf{Z}^s	matriz da flexibilidade referente ao cisalhamento
\mathbf{Z}^b	matriz de flexibilidade residual de flexão

Letras gregas

θ_y	rotação da linha que era normal a superfície média da configuração indeformada no plano x,z
θ_x	rotação da linha que era normal a superfície média da configuração indeformada no plano y,z
θ_y^k	rotação da linha que era normal a superfície média da configuração indeformada no plano x,z correspondente a configuração de kirchhoff
θ_x^k	rotação da linha que era normal a superfície média da configuração indeformada no plano y,z correspondente a configuração de kirchhoff
σ	tensor de tensões
τ	tensão de cisalhamento
ϵ	tensor de deformação
γ	deformação angular
ν	coeficiente de Poisson
∇^2	operador Laplaciano
κ	curvatura
$\bar{\epsilon}$	tensor de deformações virtuais
ξ	coordenada do elemento de referência correspondente ao eixo x
η	coordenada do elemento de referência correspondente ao eixo y
α	ângulo entre os eixos ξ e x
β	ângulo entre os eixos η e x
ϕ	ângulo entre os dois vetores unitários
δ_I	ângulo entre o lado I e o eixo x
θ^p	projecção dos vetores de rotação nodais

Capítulo 1

Introdução

1.1 Escopo e Motivação

O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvido a partir da década de 1940 para aplicação em engenharia e utilizado em problemas onde as soluções analíticas eram muito complicadas ou impossíveis de serem obtidas. O MEF é um método numérico para a resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais, que se baseia em técnicas de discretização de domínios, de modo que muitas equações são geradas e resolvidas simultaneamente em um computador digital.

Os resultados obtidos raramente são exatos. Entretanto, os erros diminuem através de um processamento de maior número de equações, e os resultados são precisos o suficiente para sua aplicação em engenharia com um custo computacional razoável [30].

A generalidade e as potencialidades do método têm levado engenheiros, matemáticos e físicos a aperfeiçoarem cada vez mais essa técnica. Nesse sentido novos programas computacionais de uso geral, que englobam desde a modelagem geométrica até o pós-processamento dos resultados, passando por diferentes modelos de resolução, têm sido desenvolvidos ao longo das últimas décadas. O MEF originou-se como um método para a análise de tensões, mas hoje, devido à evolução da indústria eletrônica e da informática, o método tornou-se tão viável do ponto de vista de tempo de processamento e custo computacional que é utilizado para a análise de problemas de transferência de calor, escoamento de fluídos, campos magnéticos, etc [30].

O desenvolvimento do MEF para solução de problemas práticos de engenharia começou

com o advento do computador digital. Usando o MEF com o computador, tornou-se possível estabelecer e resolver as equações governantes para problemas complexos de uma maneira efetiva. A grande generalidade de estruturas que podem ser analisadas, a relativa facilidade de estabelecer as equações governantes, assim como as boas propriedades numéricas do sistema de matrizes envolvidos no MEF, tornaram o MEF um método de grande apelo [3].

Dentre os vários tipos de elemento existentes para o cálculo estrutural, os elementos de placas e de cascas foram alvo de extensa pesquisa. Os elementos de casca apresentam uma maior aplicabilidade em casos práticos de engenharia pois podem representar geometrias complexas de uma maneira mais fácil que elementos de placa, já que os nós dos elementos de casca não precisam estar no mesmo plano. Entretanto, alguns autores acreditam que a formulação de um elemento de placa pode ser considerado um importante passo no desenvolvimento de um elemento mais geral de casca. Assim, os elementos de placa ainda constituem uma área ativa de pesquisa atualmente [25, 67] e serão objeto do estudo realizado neste trabalho.

Desde o desenvolvimento do primeiro elemento de placa, um número muito grande de elementos foi proposto [7]. De acordo com MacNeal [58], uma grande variedade de elementos de placa foi proposta, sendo que os elementos de maior ordem e portanto mais complexos não se mostraram comercialmente viáveis devido, em parte, ao seu grande custo computacional. Assim, para efeito de aplicações práticas de engenharia, a escolha fica inicialmente entre os elementos da mais baixa ordem possível (deslocamento linear) ou elementos com ordem muito próximas da ordem mínima (deslocamento quadrático).

Não foram encontradas na literatura publicações que mostrem o desempenho dos principais elementos de placa de forma comparativa quando submetidos a um conjunto amplo de testes.

O conhecimento sobre a teoria e formulação utilizada no desenvolvimento destes elementos, a identificação de um conjunto de testes específicos para este tipo de elemento e seus respectivos desempenhos nos testes serve para formar uma base sólida para o desenvolvimento de novas técnicas em futuras pesquisas.

Assim, o presente trabalho visa a formulação e a implementação computacional de elementos de placa de baixa ordem quadrilateral de 4 nós de uso amplo e aplicabilidade diversificada.

Identifica-se na literatura um conjunto adequado e pertinente de testes consagrados na comunidade científica para avaliação destes elementos.

Os testes são aplicados, e é feita uma comparação através da análise dos resultados obtidos em termos de precisão, custo computacional e convergência para as várias situações avaliadas. Os resultados deste conjunto de testes visa identificar as características, qualidades e eventuais limitações de cada elemento, fornecendo subsídios para que o projetista possa escolher de forma consistente, qual a tecnologia mais adequada para cada situação avaliada nos testes.

1.2 Retrospectiva Histórica e Revisão Bibliográfica

O primeiro elemento de placa de flexão foi criado em 1961 por Clough e Adini [1], que empregava a teoria clássica de placa delgada de Kirchhoff [49]. Na teoria de Kirchhoff, as deformações transversais de cisalhamento são consideradas nulas. Uma das virtudes da teoria clássica para o projeto de elementos de placa é que o projetista necessita somente especificar o deslocamento transversal w em função da posição e as rotações θ_y e θ_x , que são as rotações das linhas que eram normais a superfície média da configuração indeformada nos planos x,z e y,z , respectivamente [60].

Desenvolvedores de elementos de Kirchhoff logo descobriram que uma solução completa satisfatória não poderia ser obtida para nenhum elemento com 3 graus de liberdade por nó [60]. Especificamente, Irons e Draper [47], em 1965, descobriram que uma expressão para w que garanta que as curvaturas de flexão das superfícies sejam únicas não pode, ao mesmo tempo, garantir continuidade das rotações θ_y e θ_x ao longo das bordas em comum de elementos adjacentes. A continuidade das rotações é importante porque, sem isso, um conjunto de elementos não pode representar um estado de curvatura de flexão constante.

Enquanto os projetistas de elementos de Kirchhoff tentavam superar limitações fundamentais, um certo progresso estava para ser feito em uma nova direção. Em 1969, Ahmad [2] publicou o primeiro elemento de placa de 8 nós a usar a teoria de placa espessa, desenvolvida primeiramente por Reissner [70, 71] em 1947 e de uma maneira um pouco diferente por Mindlin [63] em 1951. Na teoria de Reissner-Mindlin, como assim é chamada na literatura,

as deformações de cisalhamento transversais não são mais consideradas nulas, como era feito na teoria de Kirchhoff, o que constitui uma das principais vantagens desta formulação [60].

A nova teoria, além de acomodar as deformações de cisalhamento, ainda apresenta o deslocamento w e as rotações θ_y e θ_x como sendo variáveis independentes. Isso facilita bastante a busca por funções de forma que garantam a continuidade dos deslocamentos e das rotações ao longo das bordas de elementos adjacentes. Essa teoria abre o caminho para uma variedade maior de esquemas de interpolação [36].

Logo após o desenvolvimento do elemento de Ahmad, Zienkiewicz [88] mostrou que as soluções obtidas com o elemento divergia da solução exata da teoria clássica de Kirchhoff em aplicações de placa e casca com espessuras muito delgadas. Infelizmente, a prática demonstrou que elementos isoparamétricos de placa e de casca baseados no método dos deslocamentos e no conceito de degeneração sofrem de deficiências numéricas extremamente graves, referidas na literatura como *travamento* [65].

Esse fenômeno ocorre quando elementos muito finos se tornam artificialmente ou erroneamente rígidos [41]. O *travamento*, quando associado a representação insuficiente das deformações de flexão e cisalhamento, é conhecido como *travamento por cisalhamento* ("*shear locking*"). Nesses casos, por exemplo, pode ocorrer que em modos de deformação puros de flexão são acompanhados, no elemento, por deformações de cisalhamento parasitas ou artificiais, que não deveriam existir de acordo com a teoria clássica [86].

O *travamento* é, portanto, um fenômeno que pode afetar de maneira inadmissível os resultados das discretizações de elementos finitos baseados no método dos deslocamentos, quando são utilizados elementos delgados, a menos que uma medida seja tomada no sentido de corrigi-lo [65].

Zienkiewicz [88] observou que o fenômeno de *travamento* em elementos de placa e de casca que usavam a teoria de Reissner-Mindlin podia ser em grande parte diminuído com o simples expediente de reduzir a ordem da integração numérica.

Muitos esforços foram feitos no sentido de se explicar os mecanismos envolvidos no *travamento por cisalhamento* e os efeitos da integração reduzida. A maioria das explicações foram dadas em termos do número de restrições, sugerindo que o efeito da integração redu-

zida é o de diminuir o número de restrições, e assim eliminar o travamento por cisalhamento [41, 38, 85]. Entretanto, tais explicações ainda não tornaram claros os mecanismos envolvidos no *travamento*, e foram descritas como sendo heurísticas [66]. Trabalhos mais significativos, entretanto, foram publicados desde então. Bathe e Dvorkin [6] observaram que o travamento é uma propriedade do elemento e estudaram o efeito da distorção geométrica sobre o desempenho dos elementos, sugerindo que esta distorção deve ser a mínima possível. Mais recentemente, outras publicações foram apresentadas no sentido de ampliar o conhecimento sobre este fenômeno [26, 80].

A integração reduzida, embora produza melhoras sensíveis na performance de elementos de placa e casca, também resultou, em muitos casos, no desenvolvimento de um outro fenômeno chamado de *modos espúrios* (*"spurious modes"*) [26]. Na literatura, outros nomes para esse fenômeno são encontrados, como *modos de energia nula* (*"zero energy modes"*), *instabilidades* (*"instabilities"*), *mecanismo* (*"mechanism"*), *modos cinemáticos* (*"kinematic mode"*) e *"hourglass mode"* [30].

O termo *modo de energia nula* refere-se ao vetor de deslocamento nodal que não representa um movimento de corpo rígido, mas que produz energia de deformação nula. Tais modos são o resultado de uma matriz de rigidez condicionada de uma maneira não favorável, e que em alguns casos se torna singular, quando usa-se integração reduzida [38]. No caso da matriz de rigidez se tornar singular, nenhuma solução é possível de ser obtida; enquanto que no caso da matriz ficar próxima da singularidade a solução pode se tornar instável e produzir erros inaceitáveis [36]. Pode-se argumentar que em problemas mais complexos os *modos espúrios de energia* são geralmente adequadamente restringidos em um conjunto de elementos. Entretanto, em um modelo grande e complexo, geralmente, elementos com *modos espúrios de energia* introduzem erros e resultam em uma solução instável.

Por estas razões, elementos com *modos de energia nula* devem ser evitados na prática da engenharia, em análises lineares ou não lineares [3]. Entretanto, deve ser mencionado que para prevenir os efeitos destes modos, muitos esforços foram direcionados no sentido de controlar seus efeitos indesejados [36, 20].

Um elemento que apresenta modos espúrios de energia, na literatura, é dito ser *deficiente*

de posto ("rank deficient"). O posto de uma matriz $[\mathbf{A}]$ é definido como sendo o número máximo de linhas (ou colunas) linearmente independentes. No caso de um elemento *deficiente de posto*, o posto da matriz de rigidez do elemento $[\mathbf{K}^e]$ é menor que o número de graus de liberdade do elemento menos o número de modos rígidos [30]. A presença desses modos espúrios pode ser identificada através de um teste de autovalores, que será apresentado mais adiante.

Assim, de acordo com MacNeal [61], um importante problema do estado da arte é o desenvolvimento de elementos finitos que sejam livres de *modos espúrios de energia* e ao mesmo tempo de *travamento* em todas as situações, ou seja, qualquer configuração geométrica e de carregamento.

Bathe [7] também especificou os requisitos desejáveis que um elemento de placa deve ter para ser confiável. Dentre eles, o elemento não deve apresentar *travamento* para análises de placa delgada; o elemento não deve conter *modos espúrios de energia*; o elemento deve ter uma boa capacidade de cálculo de deslocamentos e momentos de flexão e deve ser relativamente insensível a distorções geométricas; e finalmente, o elemento deve ser simples e ter um baixo custo computacional.

Desde o desenvolvimento do primeiro elemento finito de placa, muito esforço foi dedicado ao desenvolvimento de elementos de placa e de casca que atendam estes requisitos, produzindo uma extensa literatura sobre este assunto [7]. Inúmeros elementos foram propostos e muitos autores se dedicaram a esta área de pesquisa. O leitor interessado poderá consultar Hrabok [35] contendo um catálogo sobre vários elementos de placa (aproximadamente 90 até 1984) publicados na literatura.

Alguns dos mais importante autores nesta área de pesquisa, devido a sua grande e pertinente produção científica e reconhecida importância na comunidade científica, são os autores R. H. MacNeal [56, 57, 61, 58, 59, 62, 60], T. J. R. Hughes [41, 37, 38, 43, 42, 81, 36, 39, 40], K. J. Bathe [3, 32, 7, 8, 5, 28, 27, 44, 29, 45, 9, 10, 4] e T. Belytschko [24, 23, 76, 21, 19, 22, 20, 78, 11, 18, 75, 12, 51, 84, 83, 14, 15, 13, 55, 52, 17, 16, 50, 77, 34, 31].

Cada um desses autores seguiu uma linha teórica diferente no desenvolvimento de seus elementos de placa e de casca. O elemento do Bathe [7] implementado neste trabalho usou

Interpolação Mista, em que as rotações e deslocamentos são interpolados de maneiras diferentes para o cálculo do efeito da flexão e do cisalhamento. Hughes [43], por sua vez, também utilizou uma interpolação especial para calcular as deformações de cisalhamento. Já Belytschko [78] usou o conceito de *Configuração Discreta de Kirchhoff* para obter a formulação do elemento, em que se busca conseguir o resultado equivalente ao da teoria clássica de Kirchhoff. MacNeal [57] utilizou o método da *Distribuição de Deformação Assumida*, em que é assumida uma distribuição de deformação para o cálculo do efeito do cisalhamento na matriz de rigidez. Todas essas técnicas citadas serão detalhadas no capítulo 4. É importante destacar ainda que os elementos estudados do Bathe e do MacNeal são usados em programas comerciais mundialmente conhecidos: o ADINA e o MSC/ NASTRAN, respectivamente.

E para cada um desses autores, na fase de projeto destes elementos, existe um compromisso entre diversos fatores que devem ser avaliados [59]. Esses fatores envolvem precisão, custo computacional e convergência do elemento em várias situações práticas diferentes.

Objetivando padronizar essas situações na forma de testes R. H. MacNeal [61], K. J. Bathe [9, 10, 4] e K. Mallikarjuna Rao [69] propuseram em seus artigos um conjunto de testes para avaliar o desempenho dos elementos existentes e orientar o desenvolvimento de novos elementos no futuro.

Dentro desse contexto, propõe-se implementar e testar elementos de placa de baixa ordem, e realizar um estudo comparativo entre eles, de forma a construir metodologia consistente de comparação e seleção de elementos de placa. Os resultados das avaliações podem auxiliar os projetistas na escolha do melhor elemento em função das condições do problema a ser resolvido.

1.3 Objetivos e Plano da Dissertação

Portanto, dentre os objetivos propostos por esta dissertação de mestrado, podemos destacar os mais importantes:

1. Formulação e implementação computacional de 4 elementos de placa (quadrilateral de 4 nós) dos seguintes autores: Bathe, MacNeal, Hughes e Belytschko.
2. A implementação deve ser de tal forma a criar um banco de dados de elementos de

placa, objetivando a sua reutilização em futuras pesquisas, inclusive por outros pesquisadores.

3. Identificação, na literatura, de um conjunto de testes amplo para elementos de placa que auxilie o desenvolvimento de novos elementos.

4. Avaliação e comparação dos elementos implementados no que se refere à precisão e convergência quando submetidos ao conjunto de testes amplo.

5. Identificação, com base na formulação teórica dos elementos de cada autor e nos resultados dos testes, quais as qualidades e eventuais limitações particulares de cada elemento, possibilitando assim, indicar o elemento mais adequado para cada situação específica avaliada.

6. Com base na formulação dos elementos, a identificação de um conjunto de testes e seus resultados e análises, formar uma base sólida e adequada para auxiliar no desenvolvimento de novos elementos e/ou melhorias de elementos atuais em futuras pesquisas.

Para documentar as ações realizadas no sentido de alcançar os objetivos acima enumerados, o presente texto foi concebido da seguinte maneira.

No capítulo 1 é feita uma introdução, procurando-se situar a atual contribuição dentro de um panorama mais geral da área de pesquisa.

O capítulo 2 faz uma revisão teórica, de forma sucinta, dos modelos de placa delgada e espessa, procurando-se enfatizar as diferenças entre eles.

Na seqüência, o capítulo 3 mostra como o Método dos Elementos Finitos pode ser aplicado a elementos de placa de Reissner-Mindlin, usando-se uma formulação em energia.

Em seguida, no capítulo 4, são desenvolvidas as formulações dos elementos estudados neste trabalho.

No capítulo 5 a metodologia de implementação computacional é apresentada, destacando-se as principais contribuições realizadas no âmbito desta pesquisa.

Em seguida, mostra-se no capítulo 6 uma síntese dos resultados numéricos efetuados, fazendo-se uma análise comparativa entre os casos abordados.

Por último, apresenta-se no capítulo 7 as conclusões obtidas e as sugestões de continuidade do trabalho.

Capítulo 2

Teoria de Placas

Neste capítulo, de forma breve, são apresentadas as teorias clássicas de placa delgada de Kirchhoff e de placa espessa de Reissner-Mindlin. Os conceitos envolvidos nas duas teorias serão abordados de uma forma sucinta, mostrando-se somente o necessário para fundamentar as discussões presentes neste trabalho. De fato, não se pretende aqui realizar um estudo detalhado da teoria de placa, mas sim estabelecer as hipóteses adotadas na sua idealização, discutir as principais idéias envolvidas no seu equacionamento, sem muito se ater a demonstrações teóricas.

2.1 Teoria Clássica de Placa Delgada - Kirchhoff

De acordo com a teoria clássica de flexão de placas delgadas, a geometria da placa de espessura h é adequadamente descrita através da superfície mediana. A teoria de pequenos deslocamentos, geralmente atribuída a Kirchhoff [49] e Love é baseada nas seguintes hipóteses [79].

1. O material da placa é elástico e homogêneo.
2. A placa é inicialmente plana.
3. A espessura do material é pequena quando comparada com outras dimensões. A menor dimensão lateral é tipicamente 100 vezes maior que a espessura.
4. Os deslocamentos são pequenos quando comparados à espessura da placa. O máximo deslocamento de 6% a 10% da espessura é considerado o limite para teoria da pequenos deslocamentos.

5. As inclinações da superfície mediana são pequenas quando comparadas à unidade.
6. As deformações são de tal forma que as linhas retas, inicialmente normais a superfície mediana, permanecem retas e normais à superfície mediana (deformações devido ao cisalhamento serão desprezadas).
7. As tensões normais da superfície mediana são de magnitude desprezíveis.

Com base nessas hipóteses, é possível estabelecer as equações diferenciais governantes.

2.1.1 Equações Diferenciais de Kirchhoff

Na Figura 2.1, mostram-se os componentes das forças internas e externas e a convenção de sinais adotada para um elemento de placa. Assumindo que a placa esteja sujeita somente às forças laterais, das seis equações fundamentais de equilíbrio, as três seguintes podem ser usadas:

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0 \quad e \quad \sum P_z = 0 \quad (2.1)$$

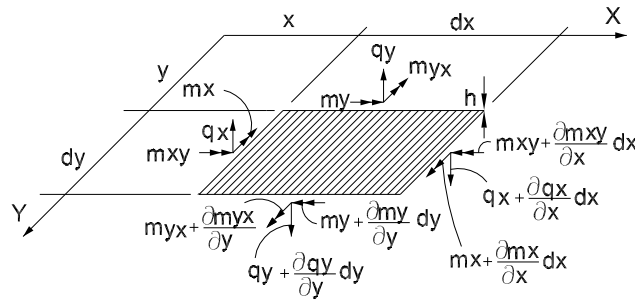


Figura 2.1: Forças internas na superfície mediana do elemento

O comportamento da placa é em muitos aspectos análogo ao da viga. Portanto, o carregamento externo p_z em um elemento diferencial $dx dy$ é equilibrado pelas forças de cisalhamento q_x e q_y e pelos momentos de flexão m_x e m_y . Uma diferença significativa da teoria da viga é a presença dos momentos volventes m_{xy} e m_{yx} . As notações q_x , q_y , m_x , m_y , m_{xy} e m_{yx} e as convenções de sinais são introduzidas na (Figura 2.1).

Expressa-se inicialmente que a soma dos momentos em torno do eixo y seja zero (Figura 2.1). Assim,

$$(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx) dy - m_x dy + (m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy) dy - m_{yx} dx - (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.2)$$

Depois da simplificação, despreza-se o termo contendo $(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dy \frac{dx}{2}$ pois é uma quantidade infinitesimal de alta ordem. Assim, (2.2) torna-se

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dy dx = 0 \quad (2.3)$$

e, depois da divisão por $dx dy$, tem-se que:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (2.4)$$

De uma forma similar, a soma dos momentos em torno do eixo x resulta em:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.5)$$

A soma das forças na direção do eixo z leva à terceira equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z = 0 \quad (2.6)$$

Substituindo (2.4) e (2.5) em (2.6) e observando que $m_{xy} = m_{yx}$, obtém-se

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = 0 \quad (2.7)$$

Os momentos referentes à Flexão e de Cisalhamento em (2.7) dependem das deformações, e as deformações são funções dos componentes do deslocamento (u, v, w) . Assim, nos próximos passos, as relações entre os momentos internos e os componentes de deslocamentos serão mostrados.

Relações entre Tensões, Deformações e Deslocamentos

Para descrever o estado tridimensional de tensão, pode-se observar um elemento infinitesimal na forma de um paralelepípedo $(dx \, dy \, dz)$ com as faces paralelas aos planos de coordenadas, como mostra a Figura 2.2. Os componentes x , y e z das tensões normais

são designados por σ_x , σ_y e σ_z , respectivamente. As tensões de cisalhamento τ levam dois subscritos. O primeiro subscrito se refere à direção da normal da superfície, enquanto que o segundo indica a direção da componente τ do tensor de tensões [79].

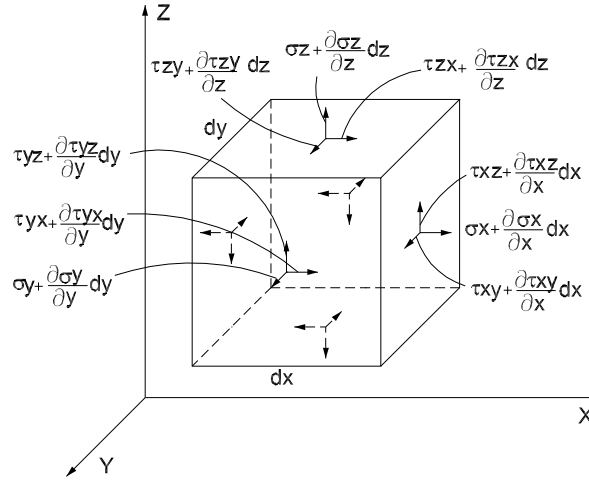


Figura 2.2: Elemento tridimensional.

A seguinte convenção de sinais será usada neste trabalho: as componentes de tensão que geram tração são positivas e as que geram compressão são negativas.

O estado tridimensional de tensão em qualquer ponto de um corpo elástico é definido por um tensor com nove componentes de tensão, que na forma matricial é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Devido a simetria do tensor de tensões, tem-se que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad e \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.9)$$

Enquanto o estado de tensão em uma placa espessa é tridimensional, placas delgadas têm um estado de tensão tridimensional incompleto. Na análise estática de placas delgadas, o estado bidimensional de tensão é de especial interesse. Neste caso, o estado plano de tensão é usado, em que $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$.

A hipótese de que o material é elástico, homogêneo e isotrópico permite a utilização da lei de Hooke, que para o caso de estado plano de tensões é dada por

$$\sigma_x = E\epsilon_x + \nu\sigma_y \quad (2.10)$$

$$\sigma_y = E\epsilon_y + \nu\sigma_x \quad (2.11)$$

que relaciona as componentes da tensão, o módulo de elasticidade E , o coeficiente de Poisson ν e as componentes da deformação ϵ em um elemento de placa. Substituindo (2.10) em (2.11), tem-se que

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (2.12)$$

De uma maneira similar:

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (2.13)$$

pode ser obtido.

Os momentos volventes m_{xy} e m_{yx} produzem tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} , que são novamente relacionados com a deformação de cisalhamento, ou deformação angular, γ pela lei de Hooke, resultando em

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.14)$$

onde G é o módulo de elasticidade de cisalhamento. Em seguida, considera-se a geometria de uma placa flexionada para expressar as deformações em termos dos deslocamentos. Considera-se uma secção, em um plano onde y é constante, mostrado na Figura 2.3 antes e depois da deformação. Usando-se as hipóteses 5 e 6, descritas na secção anterior, expressa-se o ângulo das rotações das linhas I-I e II-II da seguinte maneira:

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad e \quad \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \partial x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \partial x \quad (2.15)$$

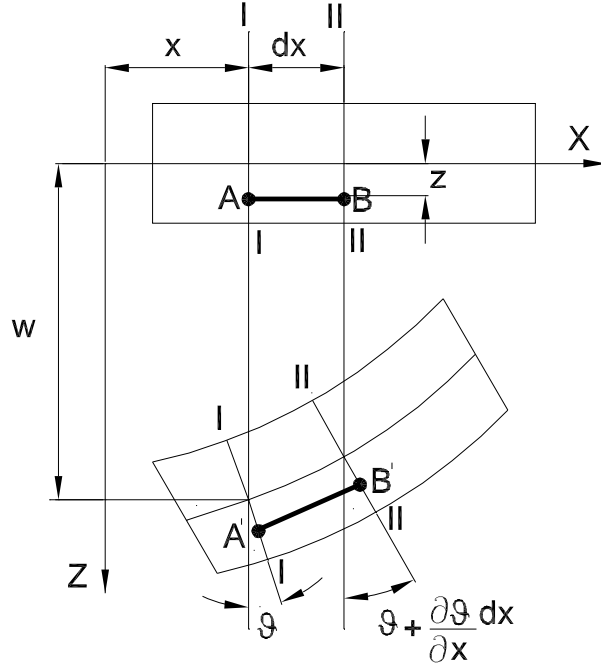


Figura 2.3: Secção antes e depois da deflexão.

respectivamente. Após a deformação, o comprimento \overline{AB} de uma fibra, localizada a uma distância z da superfície mediana, torna-se $\overline{A'B'}$, conforme mostrado na Figura 2.3.

Restringindo-se a pequenas deformações, define-se a deformação normal, ϵ , como a taxa de variação de comprimento. Na direção x , por exemplo, a deformação normal é:

$$\epsilon_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{[dx + z(\partial\vartheta/\partial x)dx] - dx}{dx} = z \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \quad (2.16)$$

Substituindo a primeira das equações de (2.15) em (2.16), tem-se

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

De forma similar obtém-se ϵ_y , a deformação na direção y ; como se segue:

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.18)$$

Considera-se agora a deformação angular $\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma''$ através da comparação de um paralelogramo retangular $ABCD$, mostrado na Figura 2.4, localizado a uma distância constante

z de uma superfície mediana com a posição deformada $A'B'C'D'$ da superfície flexionada da placa. A geometria deformada identificada na Figura 2.4, e considerando a relação (2.15), pode-se escrever que:

$$\gamma' = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.20)$$

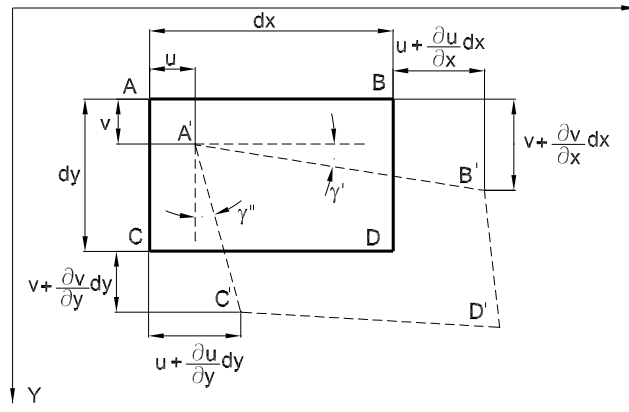


Figura 2.4: Distorções angulares projetadas

mas, da Figura 2.3, tem-se que

$$u = z\vartheta = -z\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.21)$$

similarmente,

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.22)$$

Conseqüentemente,

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \quad (2.23)$$

Assim, as curvaturas da superfície mediana flexionada são definidas por

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad e \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.24)$$

Forças Internas Expressas em Função dos Deslocamentos Laterais

Os componentes de tensão σ_x e σ_y produzem momentos de flexão no elemento de placa de uma maneira similar a uma viga. Portanto, pela integração das componentes normais de tensão, os momentos de flexão, atuando no elemento de placa, são obtidos por:

$$m_x = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \sigma_x z dz \quad e \quad m_y = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \sigma_y z dz \quad (2.25)$$

Similarmente, os momentos volventes produzidos pelas tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} podem ser calculados da seguinte maneira:

$$m_{xy} = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{xy} z dz \quad e \quad m_{yx} = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{yx} z dz \quad (2.26)$$

entretanto $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$, e portanto $m_{xy} = m_{yx}$. Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.12) e (2.13), as tensões normais σ_x e σ_y são expressas em termos da deflexão transversal w , como se segue,

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.27)$$

e

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.28)$$

A integração de (2.25), depois da substituição das expressões acima para σ_x e σ_y resulta em

$$m_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D (\kappa_x + \nu \kappa_y) \quad (2.29)$$

e analogamente para a direção y :

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D (\kappa_y + \nu \kappa_x) \quad (2.30)$$

onde $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ e representa a constante de flexão ou "rigidez flexural" da placa. De uma maneira similar, a expressão do momento volvente em termos da deflexão transversal é obtida da seguinte forma:

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{xy} z dz = -2G \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 dz = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1 - \nu) \kappa_{xy} \quad (2.31)$$

A substituição das equações (2.29), (2.30) e (2.31) em (2.7) leva a equação diferencial governante de uma placa sujeita a cargas laterais:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (2.32)$$

A seguir, expressam-se as forças de cisalhamento em termos das deflexões laterais. A substituição das equações (2.29), (2.30) e (2.31) nas equações (2.4) e (2.5) resulta em

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (2.33)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (2.34)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano.

2.1.2 Condições de Contorno de Kirchhoff

Uma solução exata da equação que governa o problema de flexão de placa delgada (2.32) deve satisfazer simultaneamente a equação diferencial e as suas respectivas condições de contorno. Duas condições de contorno, tanto de deslocamento quanto para forças internas são requeridas em cada contorno. Os componentes de deslocamento que devem ser usados na formulação das condições de contorno são deslocamento transversal (translação) e deslocamento angular (rotação). As condições de contorno de flexão em placas podem ser geralmente classificadas em condições geométricas e estáticas. Para ilustrar cada tipo de condição de

contorno, serão sempre consideradas as condições de contorno para uma borda em que x seja constante.

Condições de Contorno Geométricas ou Essenciais

As condições geométricas são fornecidas pela imposição da magnitude do deslocamento, translação ou rotação, nas bordas. Conforme indicado a seguir, para o caso de condições homogêneas:

$$w = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (2.35)$$

Condições de Contorno Estáticas ou Naturais

Para condições de contorno estáticas ou naturais, as forças de contorno são impostas. Por exemplo, em uma borda livre de uma placa pode-se dizer que o momento na borda e a força de cisalhamento (q_x) são nulos, resultando em

$$m_x = 0 \qquad q_x = 0 \qquad (2.36)$$

A força de cisalhamento total no contorno da placa (t_x) decorre de 2 termos: a força de cisalhamento no contorno (q_x) e o momento torsional (m_{xy}). A força total de cisalhamento no contorno por unidade de comprimento é dada por:

$$t_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \qquad (2.37)$$

onde q_x é a força lateral de cisalhamento calculada em (2.33). O termo, $\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$, da equação (2.37), representa a força adicional de cisalhamento nas bordas, produzidos pelo momento volvente m_{xy} , e é dada por:

$$q_x^* = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \qquad (2.38)$$

Esta força, q_x^* , é chamada de *Força Suplementar de Kirchhoff*. Substituindo os momentos volventes por estas forças equivalentes, Kirchhoff reduziu o número de condições de contorno a serem consideradas de três para duas [49]. Assim, das equações (2.29), (2.30), (2.36) e (2.37), as condições de contorno nas bordas livres podem ser escritas como

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{d^2w}{dy^2} = 0 \quad \frac{\partial^3w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (2.39)$$

Condições de Contorno Mistas

Uma condição de contorno com a borda simplesmente apoiada representa as condições de contorno mistas, em que condições de contorno geométricas e estáticas são usadas. Nesse caso, o deslocamento e o momento de flexão ao longo do contorno são nulos e podem ser indicados da seguinte maneira:

$$w = 0 \quad m_x = D \left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.40)$$

2.2 Teoria de Placa Espessa - Reissner-Mindlin

A teoria de placa delgada, que resulta na equação diferencial (2.32), e é de quarta ordem, exige que duas condições de contorno sejam satisfeitas em cada borda. Para uma placa de espessura finita, entretanto, três condições de contorno deverão ser impostas [82].

A razão formal para a impossibilidade de satisfazer mais do que duas condições de contorno, na teoria de placa delgada, se deve ao fato de que a deformação dos elementos de placa devido as forças de cisalhamento foram desprezadas. Essa hipótese equivale a considerar a constante de cisalhamento $G_z = \infty$.

A análise de tensão de uma placa elástica é bem simplificada devido a esta hipótese. A imprecisão da teoria clássica de placa delgada é mais pronunciada nas regiões próximas as bordas e em volta de furos cujos diâmetros são grandes quando comparados a espessura da placa [82].

A formulação de uma nova teoria que acomodasse o efeito da deformação de cisalhamento e as 3 condições de contorno veio em 1947 com Reissner [71] e com pequenas modificações por

Mindlin [63] em 1951. Essa teoria é conhecida na literatura como a teoria de placa espessa, ou teoria de Reissner-Mindlin. Essa teoria modificada estende significativamente o campo de aplicação das teorias de placas [87] e é amplamente utilizada atualmente.

As equações básicas da teoria de Reissner-Mindlin também serão revistas de forma breve, com o objetivo de estabelecer uma nomenclatura consistente e fundamentar as discussões apresentadas nos capítulos seguintes, já que todos os elementos implementados utilizam essa teoria.

2.2.1 Equações Diferenciais de Reissner-Mindlin

De acordo com a teoria de Reissner-Mindlin as superfícies da placa são assumidas serem livres de tensões de cisalhamento, mas são submetidas a pressões normais q_1 e q_2 [63]. Assim, tem-se que:

$$(\sigma_z)|_{+h/2} = -q_1 \quad (\sigma_z)|_{-h/2} = -q_2 \quad (2.41)$$

$$\tau_{xz}|_{\pm h/2} = 0 \quad \tau_{yz}|_{\pm h/2} = 0 \quad (2.42)$$

Para conveniência da notação, $q = q_1 - q_2$ será usado. Os momentos de flexão e volventes são definidos da mesma forma que na teoria de Kirchhoff, conforme as equações (2.25) e (2.26), respectivamente. Assim, tem-se que:

$$m_x = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \sigma_x z dz \quad m_y = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \sigma_y z dz \quad (2.43)$$

$$m_{xy} = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{xy} z dz \quad m_{yx} = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{yx} z dz \quad (2.44)$$

Já as forças cortantes são definidas como sendo:

$$q_x = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{xz} dz \quad q_y = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{yz} dz \quad (2.45)$$

Integrando as equações (2.43) e (2.44) e substituindo os valores das integrais pelas constantes ϵ^* e γ^* , tem-se que:

$$m_x = D(\epsilon_x^* + \nu\epsilon_y^*) \quad m_y = D(\epsilon_y^* + \nu\epsilon_x^*) \quad m_{yx} = \frac{(1-\nu)D}{2}(\epsilon_y^* + \nu\epsilon_x^*) \quad (2.46)$$

Procedendo de forma análoga para as forças cortantes, integrando as equações (2.45) e substituindo os valores das integrais pelas expressões de γ^* , tem-se que:

$$q_x = kGh\gamma_{xz}^* \quad q_y = kGh\gamma_{yz}^* \quad (2.47)$$

onde k é o fator de correção de cisalhamento. As componentes γ^* e ϵ^* das equações (2.47) e (2.46) são dadas por

$$\epsilon_x^* = \frac{12}{h^3} \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \epsilon_x z dz \quad \epsilon_y^* = \frac{12}{h^3} \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \epsilon_y z dz \quad \gamma_{yx}^* = \frac{12}{h^3} \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \gamma_{yx} z dz \quad (2.48)$$

Para as forças cortantes:

$$\gamma_{xz}^* = \frac{1}{h} \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \gamma_{xz} dz \quad \gamma_{yz}^* = \frac{1}{h} \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \gamma_{yz} dz \quad (2.49)$$

Com relação ao fator de correção de cisalhamento k , este ajuste se deve à hipótese adotada nesta teoria de que a deformação de cisalhamento γ_z^* é constante ao longo da espessura. Esta hipótese cinemática corresponde à teoria da viga de Timoshenko [82]. Como na verdade a deformação de cisalhamento varia ao longo da secção, a deformação de cisalhamento γ_z^* é uma constante equivalente de deformação correspondente a uma área A_s . Assim, tem-se que

$$\tau = \frac{V}{A_s} \quad k = \frac{A_s}{A} \quad (2.50)$$

onde V é a força transversal na secção transversal. Diferentes hipóteses podem ser usadas para se obter um fator de correção k razoável. Um procedimento simples é obter este fator usando a condição de que a tensão de cisalhamento constante τ atuando em A_s leve a mesma energia de deformação gerada pela tensão real (obtida a partir da teoria de vigas, com variação quadrática ao longo da espessura) atuando na área secção transversal também real A . Assim, tem-se que a energia de deformação U de uma viga por unidade de comprimento é dada por

$$U = \int_A \frac{1}{2G} \tau_a^2 dA \quad (2.51)$$

onde τ_a é a tensão verdadeira (de acordo com a teoria das vigas). Entretanto, na teoria de Reissner-Mindlin, por hipótese, a deformação de cisalhamento é constante ao longo da área transversal. Como na realidade essa deformação varia, quer se encontrar um área com secção transversal A_s equivalente, com a mesma energia de deformação. Assim,

$$\int_A \frac{1}{2G} \tau_a^2 dA = \int_{A_s} \frac{1}{2G} \left(\frac{V}{A_s} \right)^2 dA \quad (2.52)$$

onde V é a força de cisalhamento transversal total atuando na secção A . Se usarmos $k = A_s/A$ e desenvolvendo (2.52), tem-se que

$$k = \frac{V^2}{A \int_A \tau_a^2 dA} \quad (2.53)$$

A teoria elementar de viga [3] fornece que a distribuição da tensão ao longo da espessura é dada por:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left[\frac{(h/2)^2 - z^2}{(h/2)^2} \right] \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.53) resulta em que $k = 5/6$.

Para obter as relações de deformação-deslocamento da placa, as relações de deformação-deslocamento da teoria tridimensional são integradas de acordo com as equações (2.48) e (2.49). Assim:

$$\int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \epsilon_x z dz = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \frac{\partial u}{\partial x} z dz \quad (2.55)$$

$$\int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \epsilon_y z dz = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \frac{\partial v}{\partial y} z dz \quad (2.56)$$

$$\int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \gamma_{yx} dz = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) z dz \quad (2.57)$$

Para as forças cortantes, tem-se que:

$$\int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \gamma_{xz} dz = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \quad (2.58)$$

$$\int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \gamma_{yz} dz = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz \quad (2.59)$$

Uma das hipóteses da teoria de Reissner-Mindlin é que as partículas da placa que originalmente estavam em uma linha reta, que era normal à superfície mediana não deformada, permanecem em uma linha reta durante a deformação, mas esta linha não é necessariamente normal a superfície mediana deformada [63]. Com essa hipótese, os componentes do deslocamento de um ponto de coordenadas x , y e z são, considerando pequenos deslocamentos, dados por [3]

$$u = -z\theta_y(x, y) \quad v = -z\theta_x(x, y) \quad w = w(x, y) \quad (2.60)$$

onde w é o deslocamento transversal da superfície mediana e θ_y e θ_x são as rotações das secções, que são obtidas derivando-se w em relação a x e y respectivamente.

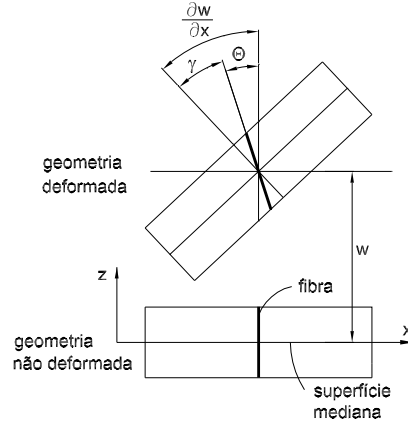


Figura 2.5: Cinemática da Placa de Reissner-Mindlin.

Das equações (2.48), (2.49), (2.55), (2.56), (2.57), (2.58), (2.59) e (2.60), tem-se que as relações deformação-deslocamento de placa são dadas por:

$$\epsilon_x^* = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad \epsilon_y^* = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad \gamma_{yx}^* = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (2.61)$$

Para as forças cortantes

$$\gamma_{xz}^* = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{yz}^* = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.62)$$

Na teoria de Kirchhoff $\gamma_{xz}^* = \gamma_{yz}^* = 0$. Para conveniência de notação, de agora em diante, ϵ^* e γ^* serão substituídos por ϵ e γ , respectivamente.

Assume-se que as deformações de flexão ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} variam linearmente ao longo da espessura da placa e são dadas pelas curvaturas da placa usando (2.62) [3]. Portanto, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

As deformações de cisalhamento, que eram desprezadas na teoria de Kirchhoff, agora são assumidas constantes ao longo da espessura da placa e, conforme mostrado na Figura 2.5, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

O estado de tensão na placa corresponde então a condição de estado plano de tensões ($\sigma_z = 0$). Assim para um material isotrópico, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -z \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Substituindo as equações (2.61) e (2.62) nas equações (2.46) e (2.47), as seguintes relações são obtidas entre momentos, forças e deslocamentos.

$$m_x = D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \quad m_y = D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (2.67)$$

$$m_{yx} = \frac{1 - \nu}{2} D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (2.68)$$

$$q_x = kGh \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad q_y = kGh \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.69)$$

Reescrevendo as equações (2.4) e (2.5) da placa delgada de Kirchhoff, tem-se que:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \quad \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.70)$$

Reescrevendo também a equação (2.6):

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z = 0 \quad (2.71)$$

As equações (2.70) e (2.71) podem ser escritas em termos dos deslocamentos (θ_x , θ_y e w) com o uso das equações (2.67), (2.68) e (2.69). Assim, tem-se que:

$$\frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \theta_y + (1 + \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] - kGh \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \theta_x + (1 + \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] - kGh \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.73)$$

$$kGh (\nabla^2 w + \Phi) + q = 0 \quad (2.74)$$

sendo que

$$\Phi = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (2.75)$$

Uma equação diferencial governante pode ser obtida através da eliminação de θ_x e θ_y das equações (2.72), (2.73) e (2.74) da seguinte forma. As equações (2.72) e (2.73) são diferenciadas com relação a x e y , respectivamente, e adicionadas para obter:

$$(D\nabla^2 - kGh) \Phi = kGh \nabla^2 w \quad (2.76)$$

Em seguida, eliminando-se Φ entre as equações (2.76) e (2.74), tem-se que:

$$D\nabla^4 w = \left(1 - \frac{D\nabla^2}{kGh} \right) q \quad (2.77)$$

2.2.2 Condições de Contorno de Reissner-Mindlin

As condições de contorno da placa podem ser divididas em 3 condições de contorno de força e 3 condições de contorno de deslocamento [71]. As condições de contorno de força em uma borda, por exemplo, em que x é constante são dadas por: m_x , m_{xy} e q_x . E as 3 condições de contorno de deslocamento são dadas por: θ_y , θ_x e w .

Destas 6 condições de contorno, 3 devem ser definidas [70, 71, 63]: m_x ou θ_y , m_{xy} ou θ_x , e q_x ou w . É importante destacar que esta se constitui uma das diferenças entre a teoria de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, já que na teoria de Kirchhoff o momento m_{xy} é suprimido com o uso das *Forças Suplementares de Kirchhoff*, reduzindo as condições de contorno a serem prescritas de 3 para 2.

Capítulo 3

Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)

3.1 Derivação das Equações de Equilíbrio dos Elementos Finitos

A fim de ilustrar as principais etapas da formulação de elementos finitos, considera-se o equilíbrio de um corpo genérico tridimensional. O corpo é suportado pela área S_u , que impõe os deslocamentos prescritos \mathbf{u}^{Su} e é sujeito a forças \mathbf{f}^{Sf} (força por unidade de área) na área de superfície S_f [3].

Além disso, o corpo é sujeito a forças de volume aplicadas externamente \mathbf{f}^{B} e forças concentradas \mathbf{r}_c^i (onde i denota o ponto de aplicação da carga).

$$\mathbf{f}^{\text{B}} = \begin{Bmatrix} f_x^{\text{B}} \\ f_y^{\text{B}} \\ f_z^{\text{B}} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}^{\text{Sf}} = \begin{Bmatrix} f_x^{\text{Sf}} \\ f_y^{\text{Sf}} \\ f_z^{\text{Sf}} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_c^i = \begin{Bmatrix} r_{cx}^i \\ r_{cy}^i \\ r_{cz}^i \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Os deslocamentos do corpo, medidos a partir da configuração indeformada são avaliados no sistema de coordenadas x , y e z e são denotados por \mathbf{u} .

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Uma forma integral adequada à formulação do MEF pode ser obtida, usando-se o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* [3] em que:

$$\int_V \bar{\epsilon}^T \sigma dV = \int_V \bar{\mathbf{u}}^T f^B dV + \int_V \overline{(\mathbf{u}^{Sf})^T} \mathbf{f}^{Sf} dS + \sum_i \overline{(\mathbf{u}^i)^T} \mathbf{r}_c^i \quad (3.3)$$

onde \bar{u} são os deslocamentos virtuais e $\bar{\epsilon}$ são as deformações virtuais correspondentes (o traço superior denotando quantidades virtuais).

Na análise de elementos finitos aproxima-se um corpo como um conjunto de elementos finitos interconectados em pontos nodais nas superfícies de cada elemento. Os deslocamentos medidos em um sistema de coordenadas locais (x , y e z) dentro de cada elemento são assumidos ser uma função dos deslocamentos nos N nós dos elementos finitos. Assim, para o elemento (n) tem-se que:

$$\mathbf{u}^{(n)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(n)}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}} \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{H}^{(n)}$ é a matriz de funções de interpolação, o índice (n) denota o elemento (n) , e $\hat{\mathbf{u}}$ é um vetor dos três deslocamentos globais u_i , v_i e w_i de todos os nós.

A escolha de um elemento e a construção das equações de interpolação em $\mathbf{H}^{(n)}$ (que depende da geometria do elemento, o número de nós, graus de liberdade do elemento e os requisitos de convergência) constituem os passos básicos para a formulação dos diferentes elementos.

Com a hipótese de que os deslocamentos são aproximados conforme a equação (3.4), podem-se avaliar as deformações correspondentes como se segue:

$$\epsilon^{(n)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(n)}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}} \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{B}^{(n)}$ é a matriz de deslocamento-deformação, em que as linhas de $\mathbf{B}^{(n)}$ são obtidas após a derivação apropriada e combinando as linhas da matriz $\mathbf{H}^{(n)}$.

As tensões no elemento finito estão relacionadas às deformações $\epsilon^{(n)}$ e as tensões iniciais $\sigma'^{(n)}$ conforme escrito na expressão a seguir:

$$\sigma^{(n)} = \mathbf{C}^{(n)} \epsilon^{(n)} + \sigma'^{(n)} \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{C}^{(n)}$ é a matriz de elasticidade do elemento (n) e o vetor $\sigma'^{(n)}$ denota as tensões iniciais.

Usando a hipótese dos deslocamentos dentro de cada elemento, como expressado em (3.4), podem-se derivar as equações de equilíbrio. Primeiramente reescreve-se (3.3) como a soma das integrais dos volumes e áreas de todos os elementos finitos:

$$\begin{aligned} \sum_e \int_V \overline{(\epsilon^{(n)})^T} \sigma^{(n)} dV^{(n)} &= \sum_e \int_V \overline{(\mathbf{u}^{(n)})^T} \mathbf{f} \mathbf{B}^{(n)} dV^{(n)} + \\ \sum_e \int_{S_1^{(n)} \dots S_q^{(n)}} \overline{(\mathbf{u}^{\mathbf{S}^{(n)}})^T} \mathbf{f} \mathbf{S}^{(n)} dS^{(n)} &+ \sum_i \overline{(\mathbf{u}^{(i)})^T} \mathbf{r}_c^i \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $(n)=1,2,\dots,k$, sendo k = número de elementos, e $S_i^{(n)}, \dots, S_q^{(n)}$ denotam as superfícies do corpo S .

As relações em (3.4) e (3.5) foram dadas para os deslocamentos e deformações reais desconhecidas. Com o uso do *princípio dos deslocamentos virtuais*, empregam-se as mesmas hipóteses para os deslocamentos e deformações virtuais.

$$\overline{\mathbf{u}^{(n)}}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(n)}(x, y, z) \overline{\hat{\mathbf{u}}} \quad (3.8)$$

$$\overline{\epsilon^{(n)}}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(n)}(x, y, z) \overline{\hat{\mathbf{u}}} \quad (3.9)$$

Substituindo-se estas expressões em (3.7), tem-se

$$\overline{(\hat{\mathbf{u}})^T} \left[\sum_e \int_{V^{(n)}} (\mathbf{B}^{(n)})^T \mathbf{C}^{(n)} \mathbf{B}^{(n)} dV^{(n)} \right] \hat{\mathbf{u}} = \overline{(\hat{\mathbf{u}})^T} \left[\begin{aligned} &\left\{ \sum_e \int_{V^{(n)}} (\mathbf{H}^{(n)})^T \mathbf{f} \mathbf{B}^{(n)} dV^{(n)} \right\} \\ &+ \left\{ \sum_e \int_{S_1^{(n)} \dots S_q^{(n)}} (\mathbf{H}^{\mathbf{S}^{(n)}})^T \mathbf{f} \mathbf{S}^{(n)} dS^{(n)} \right\} \\ &- \left\{ \sum_e \int_{V^{(n)}} (\mathbf{B}^{(n)})^T \sigma'^{(n)} dV^{(n)} \right\} + \mathbf{r}_c \end{aligned} \right] \quad (3.10)$$

onde as matrizes de interpolação dos deslocamentos de superfície $\mathbf{H}^{\mathbf{S}^{(n)}}$ são obtidas das matrizes de interpolação dos deslocamentos $\mathbf{H}^{(n)}$ em (3.4) através da substituição apropriada das coordenadas do elemento da superfície e \mathbf{r}_c é um vetor das cargas concentradas aplicadas aos nós dos elementos que formam a malha.

Para obter de (3.10) as equações para os deslocamentos nodais desconhecidos, aplica-se o *princípio dos deslocamentos virtuais* n vezes através da imposição de que o deslocamento virtual seja unitário para todos os componentes de $\overline{\hat{\mathbf{U}}}$. Isto resulta em

A partir da equação (3.10) pode-se calcular os termos virtuais de ambos os lados, e escrever a equação discretizada da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (3.11)$$

onde a matriz \mathbf{K} é a matriz de rigidez global,

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{V^{(n)}} (\mathbf{B}^{(n)})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^{(n)} dV^{(n)} \quad (3.12)$$

e \mathbf{r} é o vetor de carregamento dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_c \quad (3.13)$$

e de agora em diante denotam-se os deslocamentos nodais desconhecidos como \mathbf{u} , isto é, $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$. O vetor de carregamento \mathbf{r} inclui o efeito das forças do corpo do elemento \mathbf{r}_b ,

$$\mathbf{r}_b = \sum_e \int_{V^{(n)}} (\mathbf{H}^{(n)})^T \mathbf{f} \mathbf{B}^{(n)} dV^{(n)} \quad (3.14)$$

o efeito das forças superficiais do elemento \mathbf{r}_s ,

$$\mathbf{r}_s = \int_{S_1^{(n)} \dots S_q^{(n)}} (\mathbf{H}^{\mathbf{S}(n)})^T \mathbf{f}^{\mathbf{S}(n)} dS^{(n)} \quad (3.15)$$

o efeito das tensões iniciais \mathbf{r}_i ,

$$\mathbf{r}_i = \sum_e \int_{V^{(n)}} (\mathbf{B}^{(n)})^T \sigma' dV^{(n)} \quad (3.16)$$

e as cargas concentradas \mathbf{r}_c .

Nota-se que a soma das integrais de volume dos elementos em (3.12) expressa a montagem direta das matrizes de rigidez dos elementos $K^{(n)}$ para obter a matriz de rigidez total do conjunto de elementos, ou a matriz de rigidez global. Trata-se portanto da aplicação direta do método dos deslocamentos. Do mesmo jeito, o vetor de força do corpo do conjunto é calculado diretamente, montando-se os vetores de força do corpo de cada elemento $r_b^{(n)}$; r_s e r_i são obtidos de maneira análoga.

3.2 Elementos de Placa de Reissner-Mindlin

Uma grande quantidade de tipos de elementos finitos foram propostas desde o primeiro elemento de placa [35]. Entretanto, todos os elementos que foram estudados neste trabalho incluem-se na mesma categoria. A motivação da escolha desta categoria, como por exemplo, o elemento ser quadrilateral de 4 nós de placa, ter funções de forma de baixa ordem e utilizar a teoria de Reissner-Mindlin já foi anteriormente descrita na introdução. A formulação clássica para elementos de Reissner-Mindlin, bem como suas limitações serão descritas a seguir.

Considerando um elemento de placa de Reissner-Mindlin, a expressão para o *princípio dos deslocamentos virtuais* é, sendo p igual ao carregamento transversal constante por unidade de área A [3],

$$\int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz dA + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz dA = \int_A w p dA \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (2.63), (2.64), (2.65) e (2.66) em (3.17), tem-se que

$$\int_A (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{C}^b \mathbf{B}^b dA + \int_A (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{C}^s \mathbf{B}^s dA = \int_A w p dA \quad (3.18)$$

Assim, retomando a equação (3.12), a matriz de rigidez global é dada por

$$\mathbf{K} = \int_A (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{C}^b \mathbf{B}^b dA + \int_A (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{C}^s \mathbf{B}^s dA \quad (3.19)$$

onde o primeiro termo refere-se ao efeito da flexão e o segundo termo refere-se ao efeito do cisalhamento. A matriz \mathbf{B}^b é a matriz de deslocamento-deformação devido à flexão, que é obtida a partir da equação (2.63):

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

onde \mathbf{B}^s é a matriz de deslocamento-deformação devido ao cisalhamento, que é obtida a partir da equação (2.64):

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

As matrizes constitutivas do material, \mathbf{C}^b e \mathbf{C}^s , para o cálculo da matriz de rigidez devido a flexão e cisalhamento, respectivamente, e são obtidas através das equações (2.65) e (2.66). Assim, tem-se que:

$$\mathbf{C}^b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

e θ_y e θ_x são as rotações das secções, w é o deslocamento transversal da superfície mediana, e A é a área da superfície mediana da placa.

A forma mais usual e simples de formular um elemento é interpolar o deslocamento e as rotações:

$$w = \sum_{i=1}^j N_i w_i \quad \theta_y = \sum_{i=1}^j N_i \theta_{yi} \quad \theta_x = \sum_{i=1}^j N_i \theta_{xi} \quad (3.23)$$

onde w_i , θ_{yi} e θ_{xi} são os valores nodais das variáveis w , θ_y e θ_x , respectivamente, e N_i são as funções de interpolação e j é o número de nós do elemento.

O principal problema que surge quando se usa a interpolação descrita em (3.23) é o fenômeno do *travamento*. Esse problema aparece quando o elemento possui espessura pequena e a integração numérica é exata. Isso se deve ao fato de que com essas interpolações, as deformações de cisalhamento transversal não podem desaparecer quando o elemento é submetido a momento de flexão constante. Portanto, a discretização por elementos finitos não é capaz de representar a análise de placa delgada através de elementos de placa de Reissner-Mindlin utilizando a interpolação convencional e integração exata [7].

3.3 Considerações sobre o Travamento

Tenta-se aqui estabelecer uma equação para se descrever o fenômeno do travamento numérico segundo a mesma abordagem apresentada em [64, 65]. Sabe-se que a energia potencial do elemento de placa pode ser expressa como:

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T C \epsilon dV - \int_V v^T f^B dv - \int_{S_f} (v^{Sf})^T f^{Sf} dS \quad (3.24)$$

onde ϵ corresponde as deformações; C , à matriz tensão-deformação; v e v^{Sf} , ao campo de deslocamentos e sua parcela atuante na superfície livre, respectivamente; f^B e f^{Sf} , às forças de volume e às forças atuantes na superfície não restringida, respectivamente. Na forma compacta, a expressão (3.24) pode ser escrita como:

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} A(v, v) - L(v) \quad (3.25)$$

onde

$$A(v, v) = \int_V \epsilon^T C \epsilon dV \quad (3.26)$$

$$L(v) = \int_V v^T f^B dv + \int_{S_f} (v^{Sf})^T f^{Sf} dS \quad (3.27)$$

A solução deste problema, segundo o Teorema da Energia Potencial, é a função que minimiza o funcional de energia potencial total (3.24). Assim, este problema passa a ser o de encontrar a função u tal que:

$$\Pi(u) = \inf_{v \in V} \Pi(v) \quad (3.28)$$

onde u é o campo de parâmetros desconhecidos de deslocamentos e rotações. É importante mencionar que a forma $A(v, v)$, no modelo de placa de Reissner-Mindlin, é composta por duas parcelas: uma referente à deformação por flexão B_1 e outra correspondente à deformação por cisalhamento transversal B_2 . Integrando cada uma destas parcelas ao longo da espessura, resulta em um termo dependente de h^3 e outro dependente de h , de forma que a formulação variacional equivalente é dada por:

$$\text{Determinar } \mathbf{u} \in V \text{ tal que :} \quad (3.29)$$

$$h^3 B_1(u; v) + h B_2(u; v) = G(v) \quad (3.30)$$

onde h é a espessura. B_1 e B_2 são formas bilineares, independentes da espessura e dependentes do modelo matemático (Reissner-Mindlin) e G é o trabalho das forças externas.

Percebe-se que para o problema definido em (3.31), como na resposta da estrutura predominam os termos da flexão (proporcionais a h^3), pode-se considerar que o trabalho das forças externas tem a seguinte forma [65]:

$$G(v) = h^3 F(v) \quad (3.31)$$

onde F é uma forma linear independente de h . Substituindo (3.31) em (3.29), tem-se que

$$B_1(u_a; v) + \frac{1}{h^2} B_2(u_a; v) = F(v) \quad (3.32)$$

sendo u_a a solução do problema. Considerando espessuras progressivamente menores em (3.32) produzirá restrições cada vez maiores sobre o termo B_2 , de forma que, no limite $h \rightarrow 0$, o termo B_2 deve anular-se. Nesse caso, a condição de deformações de cisalhamento nulas, no problema limite quando $h \rightarrow 0$, pode ser muito restritiva, e resultar num espaço no qual a única solução possível é a nula. Portanto, o problema discreto tenderá à configuração indeformada e o modelo apresentará um comportamento rígido artificial (*travamento*), considerado inadmissível. Um estudo mais detalhado sobre o problema do travamento pode ser encontrado em [64, 65].

Para resolver este problema do travamento, várias soluções foram propostas, sendo que cada autor seguiu uma determinada linha teórica. Algumas dessas soluções serão apresentadas no capítulo seguinte através da formulação e comparação do desempenho de 4 elementos encontrados na literatura.

Capítulo 4

Formulação dos Elementos de Placa

4.1 Introdução

Neste capítulo serão descritas as formulações dos quatro elementos de placa do tipo quadrilateral de 4 nós dos autores Bathe [7], Belytschko [78], Hughes [43] e MacNeal[57].

Os 4 elementos apresentam 3 graus de liberdade por nó, sendo eles o deslocamento transversal, w , e as rotações, θ_x e θ_y , formando um total de 12 graus de liberdade para cada elemento. Estes elementos são para uso em análise linear e usam a teoria de Reissner-Mindlin descrita anteriormente.

Por se tratarem de elementos de placa, os 4 nós de cada elemento da malha estão sempre no mesmo plano (xy). Desde que esta condição seja cumprida, o elemento pode assumir qualquer formato geométrico. Além disso, a implementação feita e os testes aplicados, consideraram somente malhas com elementos também em um mesmo plano.

As funções de forma para os deslocamentos e as rotações são bilineares tanto para o cálculo da matriz de rigidez de flexão como para a de cisalhamento, sendo considerados portanto elementos de baixa ordem.

Dentre os vários elementos publicados por cada autor, optou-se por escolher o elemento mais recente que apresentasse as características descritas acima. A motivação da escolha destas características, como por exemplo, o elemento ser quadrilateral de 4 nós de placa e de baixa ordem já foi anteriormente descrita.

Outro ponto importante a ser destacado é que os quatro elementos apresentam exatamente a mesma matriz de rigidez devido ao efeito da flexão, cabendo a diferença entre eles somente

ao efeito do cisalhamento. Assim, a formulação da componente de flexão será mostrada apenas uma vez.

4.2 Elemento Baseado em Interpolação Mista Proposto por K. J. Bathe

Usualmente, os elementos de placa são desenvolvidos e avaliados para análise estática e linear. Muitos autores afirmam que estes elementos são facilmente estendidos para o caso mais geral de elementos não lineares e de casca, em que, ao contrário do elemento de placa, os 4 nós não estão no mesmo plano [7].

Entretanto, Bathe e Dvorkin acreditavam que a extensão para o caso mais geral era quase impossível. Então, adotou-se o caminho inverso, ou seja, partiu-se do elemento mais geral de casca e o elemento de placa tornaria-se apenas um caso particular deste elemento [7].

Assim, o elemento de placa estudado neste trabalho de Bathe e Dvorkin [7] é um caso particular do elemento de casca proposto anteriormente pelos mesmos autores [32].

O elemento implementado é atualmente usado no programa **ADINA** (*Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis*) e faz parte da família de elementos chamada **MITC** (*Mixed Interpolated Tensorial Components*). O elemento é identificado por **MITC4** e a sua concepção foi baseada nos seguintes requisitos:

1. O elemento não deve apresentar *travamento* nas análises de placa delgada.
2. O elemento não deve conter nenhum *modo espúrio de energia*.
3. A formulação não deve se basear em fatores de ajustes numéricos.
4. O elemento deve apresentar boa performance para deslocamentos e momentos de flexão, além de ser relativamente insensível a distorções geométricas.
5. O elemento deve ser simples e apresentar baixo custo computacional.

A essência deste elemento reside na interpolação separada dos deslocamentos transversais e rotações transversais das deformações de cisalhamento. Os deslocamentos e rotações são interpolados de maneira usual (como mostrado no capítulo anterior) para o cálculo da matriz de rigidez de flexão. Entretanto, para o cálculo de cisalhamento, a interpolação é feita de forma diferente, como será mostrado adiante.

Para contornar o problema de *travamento*, a matriz de rigidez deste elemento apresenta a inclusão dos efeitos de flexão e de cisalhamento através de interpolações diferentes. Para avaliar as curvaturas, κ , usa-se a equação (3.20) e a interpolação da equação (3.23)[7].

4.2.1 Matriz de Rigidez - Flexão

Para o cálculo da matriz de rigidez devido à flexão, retoma-se (3.18), em que a matriz de rigidez devido ao efeito da flexão é dada por

$$\mathbf{K}^b = \int_{\mathbf{A}} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}^b \mathbf{B}^b d\mathbf{A} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{K}^b representa a parte da matriz de rigidez devido a flexão. Prosseguindo com o cálculo de \mathbf{B}^b , tem-se que

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde θ_y e θ_x são obtidos através da interpolação de valores nodais θ_{yi} e θ_{xi} , respectivamente, (em que i indica o número do nó) feita por funções de forma bilineares (baixa ordem), conforme indicado em (3.23).

A interpolação das variáveis será feita através da formulação isoparamétrica, tendo no elemento de referência, as coordenadas (ξ, η) correspondente as coordenadas globais (x, y) [3].

Assim, tem-se que θ_y é dado por

$$\theta_y = \left\{ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right\} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

E θ_x é dado por

$$\theta_x = \left\{ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right\} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Matricialmente, chega-se a

$$\begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Para derivar θ_x e θ_y com relação a x e com relação a y , é necessário o cálculo do jacobiano \mathbf{J} , que é dado por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Reescrevendo, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Calculando-se as derivadas de θ_y e θ_x com relação a x e y , respectivamente, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} & \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

E agora, derivando θ_y com relação a y e θ_x com relação a x , tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} & \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Assim, substituindo (4.8) e (4.9) em (4.2), obtém-se \mathbf{B}^b , que para $x = \xi$ e $y = \eta$ (ou seja, que corresponda a um elemento quadrado de lado de comprimento igual a 2, cujo jacobiano corresponda a matriz identidade), é dado por

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} & \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(1+\xi)}{4} & -\frac{(1-\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} \\ -\frac{(1+\eta)}{4} & \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & -\frac{(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & -\frac{(1-\xi)}{4} & -\frac{(1+\xi)}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Finalmente, substituindo 4.10 em 4.1, tem-se a formulação completa da matriz de rigidez devido à flexão.

4.2.2 Matriz de Rigidez - Cisalhamento

Para o cálculo da matriz de rigidez devido ao cisalhamento, retoma-se (3.18), em que a matriz de rigidez devido ao efeito do cisalhamento é dada por

$$\mathbf{K}^s = \int_A \mathbf{B}^{sT} \mathbf{C}^s \mathbf{B}^s dA \quad (4.11)$$

onde \mathbf{K}^s representa a parte da matriz de rigidez devido ao cisalhamento. Prosseguindo com o cálculo de \mathbf{B}^s , tem-se que

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

e

$$\mathbf{C}_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Entretanto, para avaliar os termos de cisalhamento, procede-se de maneira diferente. Considera-se primeiro um elemento de geometria 2 x 2 (em que as coordenadas (x, y) sejam

iguais as coordenadas isoparamétricas (ξ, η) , e assim tem-se o jacobiano como sendo a matriz identidade). Assim \mathbf{B}^s é dado através da seguinte interpolação

$$\gamma_{\xi z} = \frac{1}{2}(1 + \eta)\gamma_{\xi z}^1 + \frac{1}{2}(1 - \eta)\gamma_{\xi z}^3 \quad (4.14)$$

$$\gamma_{\eta z} = \frac{1}{2}(1 + \xi)\gamma_{\eta z}^4 + \frac{1}{2}(1 - \xi)\gamma_{\eta z}^2 \quad (4.15)$$

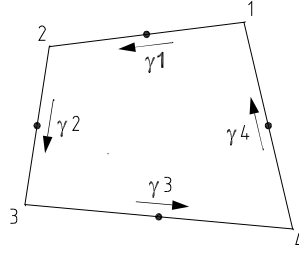


Figura 4.1: Definição do vetor de deformação de cisalhamento nodal.

onde γ^1 , γ^2 , γ^3 e γ^4 são as deformações físicas de cisalhamento nos pontos médios de cada lado, conforme mostra a Figura 4.1.

Agora, procede-se para o cálculo da deformação γ^1 , que é dada pela equação (2.64); assim

$$\gamma_{\xi z}^1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} - \theta_{y1} = \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - \theta_1 \quad (4.16)$$

onde w , de maneira análoga as rotações θ_y e θ_x , é obtido através da interpolação de valores nodais de w_i , (em que i indica o número do nó) feita por funções de forma bilineares (baixa ordem), conforme indicado em (3.23). Assim, tem-se que

$$w = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

Derivando w com relação a x e y , tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} & \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Retomando (4.3) e (4.4), tem-se respectivamente que

$$\theta_y = \left\{ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right\} \begin{pmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\theta_x = \left\{ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \quad \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right\} \begin{pmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Considerando a localização geométrica do ponto 1 no elemento de referência ($\xi=0$ e $\eta=1$), e substituindo as equações (4.18) e (4.19) em (4.16), tem-se que

$$\gamma_{\xi z}^1 = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y = \frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{\theta_{y1} + \theta_{y2}}{2} \quad (4.21)$$

Analogamente para os demais pontos:

$$\gamma_{\xi z}^3 = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y = \frac{-w_3 + w_4}{2} + \frac{\theta_{y3} + \theta_{y4}}{2} \quad (4.22)$$

$$\gamma_{\eta z}^4 = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x = \frac{w_1 - w_4}{2} + \frac{\theta_{x1} + \theta_{x4}}{2} \quad (4.23)$$

$$\gamma_{\eta z}^2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_x = \frac{w_2 - w_3}{2} + \frac{\theta_{x2} + \theta_{x3}}{2} \quad (4.24)$$

Agora, substituindo as equações (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24) em (4.14) e (4.15), tem-se que

$$\gamma_{\xi z} = \frac{1}{2}(1+\eta) \left(\frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{\theta_{y1} + \theta_{y2}}{2} \right) + \frac{1}{2}(1-\eta) \left(\frac{w_4 - w_3}{2} + \frac{\theta_{y4} + \theta_{y3}}{2} \right) \quad (4.25)$$

$$\gamma_{\eta z} = \frac{1}{2}(1+\xi) \left(\frac{w_1 - w_4}{2} + \frac{\theta_{x1} + \theta_{x4}}{2} \right) + \frac{1}{2}(1-\xi) \left(\frac{w_2 - w_3}{2} + \frac{\theta_{x2} + \theta_{x3}}{2} \right) \quad (4.26)$$

Matricialmente, para um elemento retangular em que as coordenadas (x,y) sejam iguais às coordenadas isoparamétricas (ξ, η), as deformações de cisalhamento para qualquer ponto no elemento são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} & \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(-1-\eta)}{4} & \frac{(-1-\eta)}{4} & \frac{(-1+\eta)}{4} & \frac{(-1+\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

Considerando o caso mais geral de um elemento sem ser necessariamente retangular, usa-se a mesma idéia básica da interpolação das deformações de cisalhamento descrita anteriormente para o caso retangular nas equações (4.14) e (4.15). Entretanto, agora será levada em consideração a distorção geométrica do elemento. Procedendo desta forma com o tensor de deformação de cisalhamento, as seguintes expressões das deformações de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} são obtidas

$$\gamma_{xz} = \gamma_{\xi z} \sin(\beta) - \gamma_{\eta z} \sin(\alpha) \quad (4.28)$$

$$\gamma_{yz} = -\gamma_{\xi z} \cos(\beta) - \gamma_{\eta z} \cos(\alpha) \quad (4.29)$$

onde α e β são os ângulos entre os eixos ξ e x e entre η e x respectivamente. Assim tem-se que

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi z} = & \frac{\sqrt{[(C_x + \xi B_x)^2 + (C_y + \xi B_y)^2]}}{8 \det J} (1 + \eta) \left[\frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{4} (\theta_{y1} + \theta_{y2}) + -\frac{y_1 - y_2}{4} (\theta_{x1} + \theta_{x2}) \right] + \\ & + \frac{\sqrt{[(C_x + \xi B_x)^2 + (C_y + \xi B_y)^2]}}{8 \det J} (1 - \eta) \left[\frac{w_4 - w_3}{2} + \frac{x_4 - x_3}{4} (\theta_{y4} + \theta_{y3}) - \frac{y_4 - y_3}{4} (\theta_{x4} + \theta_{x3}) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta z} = & \frac{\sqrt{[(C_x + \eta B_x)^2 + (C_y + \eta B_y)^2]}}{8 \det J} (1 + \xi) \left[\frac{w_1 - w_4}{2} + \frac{x_1 - x_4}{4} (\theta_{y1} + \theta_{y4}) - \frac{y_1 - y_4}{4} (\theta_{x1} + \theta_{x4}) \right] + \\ & + \frac{\sqrt{[(C_x + \eta B_x)^2 + (C_y + \eta B_y)^2]}}{8 \det J} + (1 - \xi) \left[\frac{w_2 - w_3}{2} + \frac{x_2 - x_3}{4} (\theta_{y2} + \theta_{y3}) - \frac{y_2 - y_3}{4} (\theta_{x2} + \theta_{x3}) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde \mathbf{J} é dado pela equação (4.6) e

$$\begin{aligned} A_x &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ B_x &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ C_x &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ A_y &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\ B_y &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \\ C_y &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \end{aligned} \quad (4.32)$$

A derivação das equações acima está apresentada no apêndice do artigo [7].

Esta formulação pode ser chamada de formulação mista, em que as rotações das secções e os deslocamentos são interpolados como mostra a equação (3.23), as curvaturas são calculadas com a equação (3.20) e as deformações de cisalhamento são interpoladas como mostrado acima.

É importante ainda destacar que o elemento *MITC4* do *ADINA* é um elemento de casca, em que os nós do elemento não precisam estar no mesmo plano. Implementou-se neste trabalho somente um caso particular desse elemento, que é de placa, onde todos os nós estão necessariamente no mesmo plano.

4.3 Elemento Isoparamétrico Proposto por T. J. R. Hughes

Um importante fator para a criação de um elemento de placa de Reissner-Mindlin é avaliar a capacidade do elemento de obter boa performance nas condições de espessura muito

pequenas (limite da placa delgada). Para tanto, deve-se examinar se o elemento é capaz de representar os modos de deformação previstos na teoria clássica de placa delgada de Kirchhoff [43]. No elemento estudado, o critério utilizado para projetar um elemento de placa de Reissner-Mindlin eficiente foi criado a partir do conceito de *Modo de Kirchhoff* [43]. O *Modo de Kirchhoff* é definido pela relação

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.34)$$

em que a rotação é obtida derivando-se o deslocamento transversal w , conforme previsto pela teoria de placa delgada. Um *Modo de Kirchhoff* de ordem pn será atingido quando w é um polinômio de ordem pn . Pelo critério adotado por Hughes, uma medida de desempenho de um elemento é obtida calculando-se a ordem do *Modo de Kirchhoff*. Quanto maior a ordem, maior a habilidade do elemento ter boa performance em condições em que a espessura da placa é muito pequena [43].

Assim, o ponto de partida conceitual para este elemento é o elemento quadrilateral em que o deslocamento transversal é interpolado via funções de forma de Lagrange de 9-nós e as rotações são interpoladas via funções de forma bilineares de 4 nós. Este elemento resulta em uma precisão quadrática com relação aos *Modos de Kirchhoff*.

A idéia do presente elemento é calcular as deformações de cisalhamento de uma maneira independente dos graus de liberdade de deslocamento dos nós do ponto médio dos lados e do nó central do elemento. Dessa forma, a rigidez do elemento leva em conta somente os graus de liberdade referentes aos deslocamentos transversais dos nós dos vértices (cantos) do elemento e, conseqüentemente, funções de forma bilineares de 4-nós devem ser usadas no lugar das funções de forma de Lagrange de 9-nós na formulação do elemento. Na interpolação proposta, os pontos médios dos lados são pontos em que as componentes da deformação de cisalhamento paralelas aos lados são calculados de maneira independentes dos valores nodais acima mencionados. Esses quatro valores escalares serão usados para definir as deformações de cisalhamento. Os detalhes do procedimento seguem abaixo. Os dados geométricos para o elemento quadrilateral de 4 nós estão descritos na Figura 4.2.

4.3.1 Matriz de Rigidez - Cisalhamento

Retomando a equação da matriz de rigidez de cisalhamento (4.1), tem-se que

$$\mathbf{K}^s = \int_A \mathbf{B}^{sT} \mathbf{C}^s \mathbf{B}^s dA \quad (4.35)$$

onde

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} B_1^s & B_2^s & B_3^s \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

e a matriz constitutiva é dada por

$$\mathbf{C}^s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

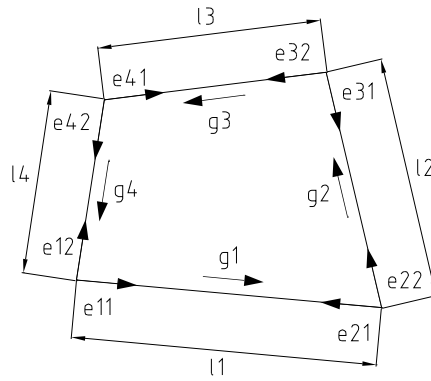


Figura 4.2: Dados geométricos para o elemento quadrilateral de 4 nós.

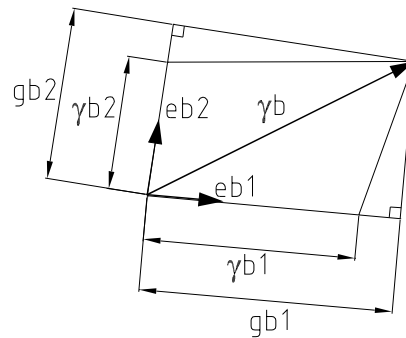


Figura 4.3: Definição do vetor nodal contendo as componentes das deformações cisalhantes.

Para cada lado do elemento define-se uma componente de cisalhamento g , localizada no ponto médio de cada lado, na direção paralela ao mesmo, conforme mostra a Figura 4.2. Assim, genericamente, pode-se escrever:

$$g_a = \frac{w_b - w_a}{l_a} + \mathbf{e}_{a1} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_b + \boldsymbol{\theta}_a}{2} \quad (4.38)$$

onde l_a é o comprimento de um lado a qualquer, \mathbf{e} é um vetor unitário e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor das rotações que é composto das componentes θ_x e θ_y . Calculando para todos os nós, tem-se que

$$g_1 = \frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \quad (4.39)$$

$$g_2 = \frac{w_3 - w_2}{l_2} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \quad (4.40)$$

$$g_3 = \frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \quad (4.41)$$

$$g_4 = \frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \quad (4.42)$$

Agora, para cada nó é definido um vetor contendo as componentes de deformação de cisalhamento $\boldsymbol{\gamma}$, conforme descrito na Figura 4.3 que auxilia na interpretação geométrica do processo.

$$\boldsymbol{\gamma}_b = \gamma_{b1} \mathbf{e}_{b1} + \gamma_{b2} \mathbf{e}_{b2} \quad (4.43)$$

sendo $b = 1, 2, 3, 4$ e b é igual ao resto da divisão de $a + 1$ por 4 ao longo de toda a formulação. Para o cálculo das componentes γ_{b1} e γ_{b2}

$$\gamma_{b2} = \frac{(g_{b2} - g_{b1} \phi_b)}{(1 - \phi_b^2)} \quad (4.44)$$

$$\gamma_{b1} = \frac{(g_{b1} - g_{b2} \phi_b)}{(1 - \phi_b^2)} \quad (4.45)$$

onde

$$\phi_b = \mathbf{e}_{b1} \cdot \mathbf{e}_{b2} = \|\mathbf{e}_{b1}\| \|\mathbf{e}_{b2}\| \cos(\phi) = \cos(\phi) \quad (4.46)$$

onde ϕ é o ângulo entre os dois vetores unitários \mathbf{e}_{b1} e \mathbf{e}_{b2} , e

$$g_{b1} = g_b \quad g_{b2} = -g_a \quad (4.47)$$

Assim, tem-se que

$$g_{11} = g_1 = \frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \quad (4.48)$$

$$g_{12} = -g_4 = -\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \quad (4.49)$$

$$g_{21} = g_2 = \frac{w_3 - w_2}{l_2} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \quad (4.50)$$

$$g_{22} = -g_1 = -\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \quad (4.51)$$

$$g_{31} = g_3 = \frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \quad (4.52)$$

$$g_{32} = -g_2 = -\frac{w_3 - w_2}{l_2} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \quad (4.53)$$

$$g_{41} = g_4 = \frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \quad (4.54)$$

$$g_{42} = -g_3 = -\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \quad (4.55)$$

Para o cálculo dos componentes de cisalhamento, usando as equações (4.44) e (4.45) tem-se que

$$\gamma_{12} = \frac{(g_{12} - g_{11}\phi_1)}{(1 - \phi_1^2)} \quad \gamma_{11} = \frac{(g_{11} - g_{12}\phi_1)}{(1 - \phi_1^2)} \quad (4.56)$$

$$\gamma_{22} = \frac{(g_{22} - g_{21}\phi_2)}{(1 - \phi_2^2)} \quad \gamma_{21} = \frac{(g_{21} - g_{22}\phi_2)}{(1 - \phi_2^2)} \quad (4.57)$$

$$\gamma_{32} = \frac{(g_{32} - g_{31}\phi_3)}{(1 - \phi_3^2)} \quad \gamma_{31} = \frac{(g_{31} - g_{32}\phi_3)}{(1 - \phi_3^2)} \quad (4.58)$$

$$\gamma_{42} = \frac{(g_{42} - g_{41}\phi_4)}{(1 - \phi_4^2)} \quad \gamma_{41} = \frac{(g_{41} - g_{42}\phi_4)}{(1 - \phi_4^2)} \quad (4.59)$$

Retornando a equação (4.43) para o cálculo dos 4 membros de cisalhamento, tem-se que

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \gamma_{11}\mathbf{e}_{11} + \gamma_{12}\mathbf{e}_{12} \quad (4.60)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2 = \gamma_{21}\mathbf{e}_{21} + \gamma_{22}\mathbf{e}_{22} \quad (4.61)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3 = \gamma_{31}\mathbf{e}_{31} + \gamma_{32}\mathbf{e}_{32} \quad (4.62)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_4 = \gamma_{41}\mathbf{e}_{41} + \gamma_{42}\mathbf{e}_{42} \quad (4.63)$$

Substituindo os valores de $\boldsymbol{\gamma}$ das equações (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) em (4.60), (4.61), (4.62) e (4.63), tem-se que

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{(g_{12} - g_{11}\phi_1)}{(1 - \phi_1^2)}\mathbf{e}_{11} + \frac{(g_{11} - g_{12}\phi_1)}{(1 - \phi_1^2)}\mathbf{e}_{12} \quad (4.64)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{(g_{22} - g_{21}\phi_2)}{(1 - \phi_2^2)}\mathbf{e}_{21} + \frac{(g_{21} - g_{22}\phi_2)}{(1 - \phi_2^2)}\mathbf{e}_{22} \quad (4.65)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{(g_{32} - g_{31}\phi_3)}{(1 - \phi_3^2)}\mathbf{e}_{31} + \frac{(g_{31} - g_{32}\phi_3)}{(1 - \phi_3^2)}\mathbf{e}_{32} \quad (4.66)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_4 = \frac{(g_{42} - g_{41}\phi_4)}{(1 - \phi_4^2)}\mathbf{e}_{41} + \frac{(g_{41} - g_{42}\phi_4)}{(1 - \phi_4^2)}\mathbf{e}_{42} \quad (4.67)$$

Agora, substituindo os valores de g obtidos em (4.48) a (4.55) nas equações (4.64) a (4.66), tem-se que

$$\begin{aligned}\gamma_1 = & \frac{\mathbf{e}_{11}}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] + \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] \phi_1 \right] + \\ & + \frac{\mathbf{e}_{12}}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] - \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] \phi_1 \right] \quad (4.68)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 = & \frac{\mathbf{e}_{21}}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} + \mathbf{e}_{12} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] + \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] \phi_2 \right] + \\ & + \frac{\mathbf{e}_{22}}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] - \left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] \phi_2 \right] \quad (4.69)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3 = & \frac{\mathbf{e}_{31}}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] + \left[\frac{w_3 - w_2}{l_1} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] \phi_3 \right] + \\ & + \frac{\mathbf{e}_{32}}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-\frac{w_3 - w_2}{l_1} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] - \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] \phi_3 \right] \quad (4.70)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4 = & \frac{\mathbf{e}_{41}}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] + \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] \phi_4 \right] + \\ & + \frac{\mathbf{e}_{42}}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] - \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] \phi_4 \right] \quad (4.71)\end{aligned}$$

Estes vetores nodais contendo as componentes de cisalhamento são interpolados através de funções de forma bilineares, da mesma forma que foi feito para os deslocamentos e rotações na equação (3.23). Assim, tem-se que

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Substituindo (4.68), (4.69), (4.70) e (4.71) em (4.72), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^s = & \frac{N_1 \mathbf{e}_{11}}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] + \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_1 \mathbf{e}_{12}}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] - \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_2 \mathbf{e}_{21}}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} + \mathbf{e}_{12} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] + \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_2 \mathbf{e}_{22}}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-\frac{w_2 - w_1}{l_1} + \mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] - \left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_3 \mathbf{e}_{31}}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] + \left[\frac{w_3 - w_2}{l_1} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_3 \mathbf{e}_{32}}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-\frac{w_3 - w_2}{l_1} + \mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] - \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_4 \mathbf{e}_{41}}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] + \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] \phi_4 \right] + \\
& + \frac{N_4 \mathbf{e}_{42}}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-\frac{w_4 - w_3}{l_3} + \mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] - \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} + \mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] \phi_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Assim, retornando a equação (4.36), tem-se que:

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} B_1^s & B_2^s & B_3^s \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

Para tornar mais clara a formulação, separa-se agora \mathbf{B}^s em seus termos B_1^s , B_2^s e B_3^s .

Assim:

$$\begin{aligned}
B_1^s = & \frac{N_1 \mathbf{e}_{11}}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] + \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_1 \mathbf{e}_{12}}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] - \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_2 \mathbf{e}_{21}}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} \right] + \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_2 \mathbf{e}_{22}}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] - \left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_3 \mathbf{e}_{31}}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] + \left[\frac{w_3 - w_2}{l_1} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_3 \mathbf{e}_{32}}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-\frac{w_3 - w_2}{l_1} \right] - \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_4 \mathbf{e}_{41}}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] + \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] \phi_4 \right] + \\
& + \frac{N_4 \mathbf{e}_{42}}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] - \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] \phi_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}
B_2^s = B_3^s = & \frac{N_1 \mathbf{e}_{11}}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[+\mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] + \left[+\mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_1 \mathbf{e}_{12}}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[+\mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] - \left[+\mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_2 \mathbf{e}_{21}}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[+\mathbf{e}_{12} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] + \left[+\mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_2 \mathbf{e}_{22}^1}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[+\mathbf{e}_{11} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1}{2} \right] - \left[+\mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_3 \mathbf{e}_{31}}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[+\mathbf{e}_{31}^1 \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] + \left[+\mathbf{e}_{21}^1 \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_3 \mathbf{e}_{32}}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[+\mathbf{e}_{21} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_3 + \boldsymbol{\theta}_2}{2} \right] - \left[+\mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_4 \mathbf{e}_{41}^1}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[+\mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] + \left[+\mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] \phi_4 \right] + \\
& + \frac{N_4 \mathbf{e}_{42}^1}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[+\mathbf{e}_{31} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_4 + \boldsymbol{\theta}_3}{2} \right] - \left[+\mathbf{e}_{41} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_4}{2} \right] \phi_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.76}$$

onde

$$\mathbf{e}_{11} = \left\{ \begin{array}{c} e_{11}^x \\ e_{11}^y \end{array} \right\} \tag{4.77}$$

onde e_{11}^x e e_{11}^y são as componentes do vetor e_{11} na direção x e y respectivamente, e o mesmo se aplica para outros índices.

Decompondo (4.36) nas componentes x e y, tem-se que

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} B_{x1}^s & B_{x2}^s & B_{x3}^s \\ B_{y1}^s & B_{y2}^s & B_{y3}^s \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

onde a primeira linha representa os componentes em x, ou seja, γ_{xz} e a segunda linha os componentes em y, ou seja, γ_{yz} . Agora, procede-se para os cálculos dos termos da equação (4.78):

$$\begin{aligned} B_{x1}^s = & \frac{N_1 e_{11}^x}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] + \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] \phi_1 \right] + \\ & + \frac{N_1 e_{12}^x}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] - \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] \phi_1 \right] + \\ & + \frac{N_2 e_{21}^x}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} \right] + \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] \phi_2 \right] + \\ & + \frac{N_2 e_{22}^x}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] - \left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} \right] \phi_2 \right] + \\ & + \frac{N_3 e_{31}^x}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] + \left[\frac{w_3 - w_2}{l_1} \right] \phi_3 \right] + \\ & + \frac{N_3 e_{32}^x}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-\frac{w_3 - w_2}{l_1} \right] - \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] \phi_3 \right] + \\ & + \frac{N_4 e_{41}^x}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] + \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] \phi_4 \right] + \\ & + \frac{N_4 e_{42}^x}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] - \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] \phi_4 \right] \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned}
B_{x2}^s = & \frac{N_1 e_{11}^x}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-e_{11}^x \cdot \frac{\theta_{y2} + \theta_{y1}}{2} \right] + \left[-e_{41}^x \cdot \frac{\theta_{y1} + \theta_{y4}}{2} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_1 e_{12}^x}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-e_{41}^x \cdot \frac{\theta_{y1} + \theta_{y4}}{2} \right] - \left[-e_{41}^x \cdot \frac{\theta_{y2} + \theta_{y1}}{2} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_2 e_{21}^x}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-e_{12}^x \cdot \frac{\theta_{y3} + \theta_{y2}}{2} \right] + \left[-e_{41}^x \cdot \frac{\theta_{y2} + \theta_{y1}}{2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_2 e_{22}^x}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-e_{11}^x \cdot \frac{\theta_{y2} + \theta_{y1}}{2} \right] - \left[-e_{21}^x \cdot \frac{\theta_{y3} + \theta_{y2}}{2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_3 e_{31}^x}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-e_{31}^x \cdot \frac{\theta_{y4} + \theta_{y3}}{2} \right] + \left[-e_{21}^x \cdot \frac{\theta_{y3} + \theta_{y2}}{2} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_3 e_{32}^x}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-e_{21}^x \cdot \frac{\theta_{y3} + \theta_{y2}}{2} \right] - \left[-e_{31}^x \cdot \frac{\theta_{y4} + \theta_{y3}}{2} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_4 e_{41}^x}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-e_{41}^x \cdot \frac{\theta_{y1} + \theta_{y4}}{2} \right] + \left[-e_{31}^x \cdot \frac{\theta_{y4} + \theta_{y3}}{2} \right] \phi_4 \right] + \\
& + \frac{N_4 e_{42}^x}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-e_{31}^x \cdot \frac{\theta_{y4} + \theta_{y3}}{2} \right] - \left[-e_{41}^x \cdot \frac{\theta_{y1} + \theta_{y4}}{2} \right] \phi_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$B_{x3}^s = 0 \tag{4.81}$$

Analogamente para γ_{yz} tem-se que:

$$\begin{aligned}
B_{y1}^s = & \frac{N_1 e_{11}^y}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] + \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_1 e_{12}^y}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] - \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_2 e_{21}^y}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} \right] + \left[\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_2 e_{22}^y}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-\frac{w_2 - w_1}{l_1} \right] - \left[\frac{w_3 - w_2}{l_2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_3 e_{31}^y}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] + \left[\frac{w_3 - w_2}{l_1} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_3 e_{32}^y}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-\frac{w_3 - w_2}{l_1} \right] - \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_4 e_{41}^y}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] + \left[\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] \phi_4 \right] + \\
& + \frac{N_4 e_{42}^y}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-\frac{w_4 - w_3}{l_3} \right] - \left[\frac{w_1 - w_4}{l_4} \right] \phi_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$B_{y2}^s = 0 \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
B_{y3}^s = & \frac{N_1 e_{11}^y}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-e_{11}^y \cdot \frac{\theta_{x2} + \theta_{x1}}{2} \right] + \left[-e_{41}^y \cdot \frac{\theta_{x1} + \theta_{x4}}{2} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_1 e_{12}^y}{(1 - \phi_1^2)} \left[\left[-e_{41}^y \cdot \frac{\theta_{x1} + \theta_{x4}}{2} \right] - \left[-e_{41}^y \cdot \frac{\theta_{x2} + \theta_{x1}}{2} \right] \phi_1 \right] + \\
& + \frac{N_2 e_{21}^y}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-e_{12}^y \cdot \frac{\theta_{x3} + \theta_{x2}}{2} \right] + \left[-e_{41}^y \cdot \frac{\theta_{x2} + \theta_{x1}}{2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_2 e_{22}^y}{(1 - \phi_2^2)} \left[\left[-e_{11}^y \cdot \frac{\theta_{x2} + \theta_{x1}}{2} \right] - \left[-e_{21}^y \cdot \frac{\theta_{x3} + \theta_{x2}}{2} \right] \phi_2 \right] + \\
& + \frac{N_3 e_{31}^y}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-e_{31}^y \cdot \frac{\theta_{x4} + \theta_{x3}}{2} \right] + \left[-e_{21}^y \cdot \frac{\theta_{x3} + \theta_{x2}}{2} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_3 e_{32}^y}{(1 - \phi_3^2)} \left[\left[-e_{21}^y \cdot \frac{\theta_{x3} + \theta_{x2}}{2} \right] - \left[-e_{31}^y \cdot \frac{\theta_{x4} + \theta_{x3}}{2} \right] \phi_3 \right] + \\
& + \frac{N_4 e_{41}^y}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-e_{41}^y \cdot \frac{\theta_{x1} + \theta_{x4}}{2} \right] + \left[-e_{31}^y \cdot \frac{\theta_{x4} + \theta_{x3}}{2} \right] \phi_4 \right] + \\
& + \frac{N_4 e_{42}^y}{(1 - \phi_4^2)} \left[\left[-e_{31}^y \cdot \frac{\theta_{x4} + \theta_{x3}}{2} \right] - \left[-e_{41}^y \cdot \frac{\theta_{x1} + \theta_{x4}}{2} \right] \phi_4 \right]
\end{aligned} \quad (4.84)$$

De posse de todos os termos de (4.78) e da equação (4.37), substitui-se na equação (4.35) para calcular a matriz de rigidez devido ao cisalhamento.

4.4 Elemento baseado no Método de Modo de Kirchhoff Proposto por T. Belytschko

O elemento de Belytschko estudado neste trabalho [78] é uma extensão das idéias originalmente aplicadas a um elemento triangular [22], em que é introduzido o conceito de *Configurações Equivalentes de Kirchhoff*. Neste elemento triangular, as curvaturas resultantes das rotações satisfazem as equações de compatibilidade da teoria de placa delgada. Entretanto, uma implementação deste conceito no elemento quadrilateral não foi possível.

Assim, foi desenvolvida uma formulação análoga para o elemento quadrilateral através do conceito de *Configuração Equivalente de Kirchhoff para o Contorno*, em que se busca a conformidade com as equações de compatibilidade de placa delgada somente nos contornos,

ou seja, nos valores de deslocamento e rotações nodais do elemento. O detalhamento é feito a seguir.

A configuração deformada do elemento de placa de Reissner-Mindlin é descrita em termos dos seus deslocamentos nodais w , vetor das rotações nodais θ e das matrizes das funções de forma \mathbf{N}^w e \mathbf{N}^θ , conforme segue:

$$w = N^w w, \quad \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = N^\theta \theta \quad (4.85)$$

Nas equações acima, w é o deslocamento transversal e θ_x e θ_y são as duas componentes da rotação da normal.

Para o elemento ter boa performance, quando aplicado a estruturas delgadas, é necessário achar uma decomposição adicional da configuração deformada em dois modos: o modo de flexão associado somente com a energia de deformação devido à flexão (independentemente das deformações de cisalhamento), e um modo de cisalhamento, que é associado com ambas as energias de deformações de flexão e cisalhamento. Assume-se que os dois modos são descritos pelas mesmas funções de forma de tal maneira que a decomposição fique restrita somente aos graus de liberdade nodais. Assim

$$\theta = \theta^b + \theta^s \quad (4.86)$$

$$w = w^b + w^s \quad (4.87)$$

onde θ^b , w^b e θ^s , w^s estão relacionados com os modos de flexão e cisalhamento, respectivamente. Os termos que aparecem no lado direito de (4.86) e (4.87) podem ser expressos da seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \theta^b \\ w^b \end{Bmatrix} = \mathbf{P}^b \begin{Bmatrix} \theta \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta^s \\ w^s \end{Bmatrix} = \mathbf{P}^s \begin{Bmatrix} \theta \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

$$\mathbf{P}^b + \mathbf{P}^s = \mathbf{I} \quad (4.90)$$

onde as matrizes \mathbf{P}^b e \mathbf{P}^s são os operadores lineares que definem os modos de flexão e cisalhamento da decomposição e \mathbf{I} é o operador de identidade. O sucesso desse método reside na escolha adequada de \mathbf{P}^b e \mathbf{P}^s .

Na matriz de rigidez do elemento, a energia de deformação devido à flexão, é associada à curvatura total, que é a soma da curvatura dos modos de flexão e cisalhamento. A energia de deformação de cisalhamento é associada somente à deformação de cisalhamento. Assim, a energia de deformação de cisalhamento associada com a rotação devido à flexão é removida. Para atingir este objetivo, a curvatura total é dada por

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa^b + \kappa^s = \mathbf{B}^b \begin{Bmatrix} \theta^b \\ w^b \end{Bmatrix} + \mathbf{B}^s \begin{Bmatrix} \theta^s \\ w^s \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{B}^b (\mathbf{P}^b + \mathbf{P}^s) \begin{Bmatrix} \theta \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^b \begin{Bmatrix} \theta \\ w \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.91)$$

e as deformações de cisalhamento no modo de cisalhamento é dado por

$$\gamma^s = \mathbf{B}^s \begin{Bmatrix} \theta^s \\ w^s \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^s \mathbf{P}^s \begin{Bmatrix} \theta \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^{ss} \begin{Bmatrix} \theta \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

A matriz de rigidez torna-se portanto

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}^b \mathbf{B}^b dA + \int_A \mathbf{B}^{ssT} \mathbf{C}^s \mathbf{B}^{ss} dA \quad (4.93)$$

onde

$$\mathbf{C}^b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

$$\mathbf{C}^s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

As rotações e deslocamentos são interpolados da mesma forma que nos demais elementos e são dados pela equação (3.23). As funções de forma, como nos outros elementos, são bilineares (baixa ordem). Assim, os deslocamentos laterais w são dados por

$$w = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \right\} \quad (4.96)$$

Derivando w com relação a x e y , tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} & \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} & \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \right\} \quad (4.97)$$

E as rotações são dadas por

$$\theta_y = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \end{array} \right\} \quad (4.98)$$

$$\theta_x = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} & \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{array} \right\} \quad (4.99)$$

Para se calcular \mathbf{B}^s , basta substituir as equações (4.97), (4.98) e (4.99) em (3.21).

A decomposição nos modos de flexão e cisalhamento será descrita na seqüência. Para entender este procedimento, duas configurações são consideradas: uma configuração de Reissner-Mindlin e a configuração de Kirchhoff descrita pela função $w^k(x, y)$ e suas derivadas θ_x^k e θ_y^k . Supondo que os campos de rotações e deslocamento nodais sejam os mesmos, ou seja,

$$\theta_x(x, y) = \theta_x^k(x, y) = -\frac{\partial w^k(x, y)}{\partial y} \quad (4.100)$$

$$\theta_y(x, y) = \theta_y^k(x, y) = \frac{\partial w^k(x, y)}{\partial x} \quad (4.101)$$

$$w_I = w_I^k, \quad I = 1, 2, \dots, 4 \quad (4.102)$$

Conseqüentemente, a energia de deformação de flexão nessas duas configurações são as mesmas. Na configuração de Kirchhoff, a energia de deformação de cisalhamento é nula. Assim, a energia de deformação de cisalhamento na configuração de Reissner-Mindlin, relacionada a de Kirchhoff pelas equações (4.100), (4.101), (4.102), deve ser removida se se deseja que o elemento de Reissner-Mindlin obtenha os mesmos bons resultados para estruturas delgadas obtidos através do elemento de Kirchhoff.

A configuração do elemento de Reissner-Mindlin, descrita acima, é bem especial, já que geralmente as equações (4.100), (4.101), (4.102) não são satisfeitas. Portanto, para esse caso, dada uma configuração de Reissner-Mindlin, é construído um conjunto de configurações equivalentes a de Kirchhoff e busca-se por uma configuração que corresponda ao campo de rotação dado o mais próximo possível, e será chamada de modo *equivalente de Kirchhoff ótimo*. Quaisquer deformações necessárias para complementar o modo de flexão para atingir a totalidade da configuração de Reissner-Mindlin constituirá o modo de cisalhamento. Idealmente a configuração de flexão deve ser descrita pelos campos de deslocamentos $w^k(x, y)$, que deve satisfazer as seguintes equações:

$$-\frac{\partial^2 w^k}{\partial x^2} = \kappa_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (4.103)$$

$$-\frac{\partial^2 w^k}{\partial y^2} = \kappa_y = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (4.104)$$

$$-2\frac{\partial^2 w^k}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (4.105)$$

Infelizmente, neste caso as curvaturas não satisfazem as equações de compatibilidade da teoria de Kirchhoff e conseqüentemente os campos de deslocamento que satisfazem (4.103), (4.104) e (4.105) geralmente não existem. Em vez disso, definem-se as *configurações de contorno equivalentes de Kirchhoff* : os deslocamentos \bar{w}^k definidos ao longo do contorno do elemento, de tal forma que as curvaturas resultantes das deformações do contorno sejam as

mesmas tanto no elemento de Reissner-Mindlin como nas configurações de contorno equivalentes de Kirchhoff.

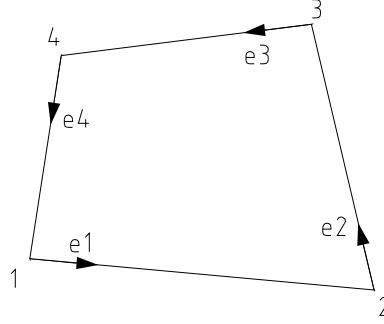


Figura 4.4: Geometria do elemento de placa quadrilateral.

Com este objetivo, primeiro calcula-se a projeção dos vetores de rotação nodais $\theta^{\mathbf{p}}$ nos lados do elemento quadrilateral. As projeções no primeiro e segundo nós do lado **I** são

$$\theta_{I,I}^p = \theta_{xI}e_{Ix} + \theta_{yI}e_{Iy} \quad (4.106)$$

$$\theta_{I,I+1}^p = \theta_{xI+1}e_{Ix} + \theta_{yI+1}e_{Iy} \quad (4.107)$$

onde e_{Ix} e e_{Iy} são os componentes x e y do vetor unitário paralelo ao lado **I** do elemento conforme mostrado na Figura 4.4; para $I=4$, $I+1$ é identificado como sendo o nó 1. Como as rotações são interpoladas por funções de forma bilineares, a projeção da rotação ao longo do lado **I** é dada por

$$\theta_I^p = \theta_{I,I}^p \left(1 - \frac{s}{l_I}\right) + \theta_{I,I+1}^p \frac{s}{l_I} \quad (4.108)$$

onde l_I é o comprimento do lado I , $s \in (0, l_I)$ é a distância do primeiro nó do lado até o ponto considerado. Assim, tem-se que a curvatura associada com o campo da equação (4.108) é

$$\kappa_I = \frac{(\theta_{I,I+1}^p - \theta_{I,I}^p)}{l_I} \quad (4.109)$$

A configuração equivalente de Kirchhoff para este lado do elemento quadrilateral é portanto descrita por

$$w^k = -\frac{1}{2}\kappa_I (s^2 - l_I s) + w_I^k \left(1 - \frac{s}{l_I}\right) + w_{I+1}^k + 1\frac{s}{l_I} \quad (4.110)$$

onde w_I^k , w_{I+1}^k são os deslocamentos das extremidades do lado I . Conseqüentemente, as rotações nodais nas configurações de Kirchhoff são

$$\theta_{I,I}^{pk} = -\frac{\partial w^k}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\theta_{I,I}^{pk} - \theta_{I,I+1}^p}{2} - \frac{w_{I+1}^k - w_I^k}{l_I} \quad (4.111)$$

$$\theta_{I,I+1}^p = -\frac{\partial w^k}{\partial s} \Big|_{s=l_I} = \frac{\theta_{I,I+1}^p - \theta_{I,I}^p}{2} - \frac{w_{I+1}^k - w_I^k}{l_I} \quad (4.112)$$

onde os deslocamentos nodais w_I^k são parâmetros arbitrários. Através da substituição de (4.106) e (4.107) em (4.111) e (4.112) um vetor θ^{pK} pode ser expresso em termos das rotações nodais totais θ e w_I^k . Assim, tem-se que

$$\theta_{I,I}^{pK} = \frac{(\theta_{xI}e_{Ix} + \theta_{yI}e_{Iy}) - (\theta_{xI+1}e_{Ix} + \theta_{yI+1}e_{Iy})}{2} - \frac{w_{I+1}^k - w_I^k}{l_I} \quad (4.113)$$

e

$$\theta_{I,I+1}^{pK} = \frac{(\theta_{xI+1}e_{Ix} + \theta_{yI+1}e_{Iy}) - (\theta_{xI}e_{Ix} + \theta_{yI}e_{Iy})}{2} - \frac{w_{I+1}^k - w_I^k}{l_I} \quad (4.114)$$

Assim, substituindo para todos os nós do elemento, tem-se que:

$$\theta_{1,1}^{pK} = \frac{(\theta_{x1}e_{1x} + \theta_{y1}e_{1y}) - (\theta_{x2}e_{1x} + \theta_{y2}e_{1y})}{2} - \frac{w_2^k - w_1^k}{l_1} \quad (4.115)$$

$$\theta_{1,2}^{pK} = \frac{(\theta_{x2}e_{1x} + \theta_{y2}e_{1y}) - (\theta_{x1}e_{1x} + \theta_{y1}e_{1y})}{2} - \frac{w_2^k - w_1^k}{l_1} \quad (4.116)$$

$$\theta_{2,2}^{pK} = \frac{(\theta_{x2}e_{2x} + \theta_{y2}e_{2y}) - (\theta_{x3}e_{2x} + \theta_{y3}e_{2y})}{2} - \frac{w_3^k - w_2^k}{l_2} \quad (4.117)$$

$$\theta_{2,3}^{pK} = \frac{(\theta_{x3}e_{2x} + \theta_{y3}e_{2y}) - (\theta_{x2}e_{2x} + \theta_{y2}e_{2y})}{2} - \frac{w_3^k - w_2^k}{l_2} \quad (4.118)$$

$$\theta_{3,3}^{pK} = \frac{(\theta_{x3}e_{3x} + \theta_{y3}e_{3y}) - (\theta_{x4}e_{3x} + \theta_{y4}e_{3y})}{2} - \frac{w_4^k - w_3^k}{l_3} \quad (4.119)$$

$$\theta_{3,4}^{pK} = \frac{(\theta_{x4}e_{3x} + \theta_{y4}e_{3y}) - (\theta_{x3}e_{3x} + \theta_{y3}e_{3y})}{2} - \frac{w_4^k - w_3^k}{l_3} \quad (4.120)$$

$$\theta_{4,4}^{pK} = \frac{(\theta_{x4}e_{4x} + \theta_{y4}e_{4y}) - (\theta_{x1}e_{4x} + \theta_{y1}e_{4y})}{2} - \frac{w_1^k - w_4^k}{l_4} \quad (4.121)$$

$$\theta_{4,1}^{pK} = \frac{(\theta_{x1}e_{4x} + \theta_{y1}e_{4y}) - (\theta_{x4}e_{4x} + \theta_{y4}e_{4y})}{2} - \frac{w_1^k - w_4^k}{l_4} \quad (4.122)$$

Reescrevendo de forma matricial as equações acima descritas

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_{1,1}^{pK} \\ \theta_{1,2}^{pK} \\ \theta_{2,2}^{pK} \\ \theta_{2,3}^{pK} \\ \theta_{3,3}^{pK} \\ \theta_{3,4}^{pK} \\ \theta_{4,4}^{pK} \\ \theta_{4,1}^{pK} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & -e_{1x} & -e_{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_{1x} & -e_{1y} & e_{1x} & e_{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{2x} & e_{2y} & -e_{2x} & -e_{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_{2x} & -e_{2y} & e_{2x} & e_{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{3x} & e_{3y} & -e_{3x} & -e_{3y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{3x} & -e_{3y} & e_{3x} & e_{3y} \\ -e_{4x} & -e_{4y} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{4x} & e_{4y} \\ e_{4x} & e_{4y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{4x} & -e_{4y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} & -\frac{1}{l_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} & -\frac{1}{l_3} \\ -\frac{1}{l_4} & 0 & 0 & \frac{1}{l_4} \\ -\frac{1}{l_4} & 0 & 0 & \frac{1}{l_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ w_3^k \\ w_4^k \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^k \end{aligned} \quad (4.123)$$

Os componentes do vetor θ^{pK} são inseridos no lado esquerdo de (4.106) e (4.107). Matricialmente, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \theta_{1,1}^{pK} \\ \theta_{1,2}^{pK} \\ \theta_{2,2}^{pK} \\ \theta_{2,3}^{pK} \\ \theta_{3,3}^{pK} \\ \theta_{3,4}^{pK} \\ \theta_{4,4}^{pK} \\ \theta_{4,1}^{pK} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{1x} & e_{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{2x} & e_{2y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{2x} & e_{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{3x} & e_{3y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{3x} & e_{3y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{4x} & e_{4y} \\ e_{4x} & e_{4y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1}^k \\ \theta_{y1}^k \\ \theta_{x2}^k \\ \theta_{y2}^k \\ \theta_{x3}^k \\ \theta_{y3}^k \\ \theta_{x4}^k \\ \theta_{y4}^k \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_3 \boldsymbol{\theta}^k \quad (4.124)$$

e os termos do lado direito desta equação se igualam aos termos da equação (4.123).

$$\mathbf{A}_3 \boldsymbol{\theta}^k = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^k \quad (4.125)$$

Em seguida, a matriz \mathbf{A}_3 é invertida e inserida no lado direito da equação (4.125) e tem-se que

$$\boldsymbol{\theta}^k = \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^k = \mathbf{A}_\theta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}_w \mathbf{w}^k \quad (4.126)$$

onde $\boldsymbol{\theta}^k$ e \mathbf{w}^k são matrizes coluna e que são relacionadas à configuração equivalente de contorno de Kirchhoff.

Como se comparam duas entidades inteiramente diferentes, ou seja, as configurações de Reissner-Mindlin e de Kirchhoff, a diferença entre elas será somente medida em termos das rotações nodais. A medida é feita da seguinte forma

$$f(\mathbf{w}^k) = (\boldsymbol{\theta}^p - \boldsymbol{\theta}^{pK}) (\boldsymbol{\theta}^p - \boldsymbol{\theta}^{pK}) \quad (4.127)$$

onde

$$\{\boldsymbol{\theta}^p\}^T = [\theta_{11}^p \ \theta_{12}^p \ \theta_{22}^p \ \theta_{23}^p \ \theta_{33}^p \ \theta_{34}^p \ \theta_{44}^p \ \theta_{45}^p] \quad (4.128)$$

$$\{\mathbf{w}^k\}^T = [w_1^k \ w_2^k \ w_3^k \ w_4^k] \quad (4.129)$$

onde θ_{IJ} é definido por (4.106) e (4.107) e θ^{pK} é análogo a θ^p de (4.128) mas seus componentes são definidos por (4.111) e (4.112). A função $f(\mathbf{w}^k)$ é minimizada com respeito à \mathbf{w}^k ; o $\mathbf{w}_{\text{ótimo}}^k$ com θ^K dado pela equação (4.125) definem a configuração ótima de Kirchhoff, que é identificada com o modo de flexão. A solução para esse problema é independente da translação do corpo rígido, assim assume-se $w_1^k=0$. Com esta hipótese, a solução é

$$\mathbf{w}^b = \mathbf{w}_{\text{ótimo}}^k = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{r} \end{array} \right\} \quad (4.130)$$

onde

$$\mathbf{d}_2^t = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{-1}{l_1} & \frac{1}{l_2} & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (4.131)$$

$$\mathbf{d}_3^t = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \frac{-1}{l_2} & \frac{1}{l_3} & 0 \end{array} \right\} \quad (4.132)$$

$$\mathbf{d}_4^t = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{-1}{l_3} & \frac{1}{l_4} \end{array} \right\} \quad (4.133)$$

$$\mathbf{s}^T = \left\{ \begin{array}{cccc} \theta_{11}^p + \theta_{12}^p & \theta_{22}^p + \theta_{23}^p & \theta_{33}^p + \theta_{34}^p & \theta_{44}^p + \theta_{41}^p \end{array} \right\} \quad (4.134)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_2^t \\ \mathbf{d}_3^t \\ \mathbf{d}_4^t \end{Bmatrix} \quad (4.135)$$

onde as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{r} são definidas da seguinte forma

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} d_2^t d_2 & d_2^t d_3 & d_2^t d_4 \\ d_3^t d_2 & d_3^t d_3 & d_3^t d_4 \\ d_4^t d_2 & d_4^t d_3 & d_4^t d_4 \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{M}\mathbf{s} \quad (4.137)$$

Para especificar o operador \mathbf{P}^b de (4.88), o vetor \mathbf{s} definido em (4.134) tem que ser expresso em termos de θ . Levando em conta (4.106) e (4.107) encontra-se que

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\theta \quad (4.138)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1x} & e_{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{2x} & e_{2y} & e_{2x} & e_{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{3x} & e_{3y} & e_{3x} & e_{3y} \\ e_{4x} & e_{4y} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{4x} & e_{4y} \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

Conseqüentemente

$$\mathbf{w}_{ótimo}^k = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_{1 \times 8} \\ \frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \overline{\mathbf{M}} \end{array} \right\} \theta \quad \overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{H} \quad (4.140)$$

e, considerando as equações (4.86), (4.87), (4.88), (4.89), (4.90), (4.100), (4.101), (4.102) e (4.125), tem-se que:

$$\mathbf{P}^b = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_\theta + \mathbf{A}_w \left\{ \frac{0_{1 \times 8}}{\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \overline{\mathbf{M}}} \right\} & \mathbf{0}_{8 \times 4} \\ \hline \left\{ \frac{0_{1 \times 8}}{\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \overline{\mathbf{M}}} \right\} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{array} \right] \quad (4.141)$$

$$\mathbf{P}^s = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{8 \times 8} - \mathbf{A}_\theta - \mathbf{A}_w \left\{ \frac{0_{1 \times 8}}{\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \overline{\mathbf{M}}} \right\} & \mathbf{0}_{8 \times 4} \\ \hline - \left\{ \frac{0_{1 \times 8}}{\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \overline{\mathbf{M}}} \right\} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \end{array} \right] \quad (4.142)$$

onde \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ são as matrizes identidade e nula respectivamente.

As equações (4.141) e (4.142), quando substituídas em (4.91) e (4.92), leva ao cálculo de \mathbf{B}^b e \mathbf{B}^{ss} . O que por sua vez permite o cálculo da matriz de rigidez definida em (4.93).

4.4.1 Matriz de Rigidez - Cisalhamento

Objetivando explicitar o cálculo da matriz de rigidez, será retomada a equação (4.93), e levando em conta somente a matriz de rigidez referente ao cisalhamento, tem-se que

$$\mathbf{K}^s = \int_A (\mathbf{B}^{ss})^T \mathbf{C}^s \mathbf{B}^{ss} dA \quad (4.143)$$

onde, \mathbf{C}^s é dado pela equação (4.95). Para o cálculo de \mathbf{B}^{ss} , de (4.92) tem-se que

$$\mathbf{B}^{ss} = \mathbf{B}^s \mathbf{P}^s \quad (4.144)$$

Novamente, para se calcular \mathbf{B}^s , basta substituir as equações (4.97), (4.98) e (4.99) em (3.21).

Agora para o cálculo de \mathbf{P}^s da equação (4.144), retoma-se a equação (4.142)

$$\mathbf{P}^s = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{8 \times 8} - \mathbf{A}_\theta - \mathbf{A}_w \left\{ \frac{0_{1 \times 8}}{\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \overline{\mathbf{M}}} \right\} & \mathbf{0}_{8 \times 4} \\ \hline - \left\{ \frac{0_{1 \times 8}}{\frac{1}{2} \mathbf{G}^{-1} \overline{\mathbf{M}}} \right\} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \end{array} \right] \quad (4.145)$$

onde \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ são as matrizes identidade e nula respectivamente. Além disso, \mathbf{G} é dado por (4.136), \mathbf{M} é dado por (4.140) e \mathbf{A}_θ e \mathbf{A}_w são calculados por (4.125).

4.5 Elemento baseado no Método de Deformação Assumida (QUAD4) Proposto por R. H. MacNeal

O elemento original **QUAD4** [56] usava a teoria isoparamétrica com integração seletiva reduzida para avaliar as deformações de cisalhamento. O elemento **QUAD4** foi usado no **MSC/ NASTRAN** em 1976 e o travamento foi logo reportado para elementos relativamente pouco distorcidos geometricamente (ângulos internos maiores que 30°). Em 1977 foi descoberto que o elemento não passava no "Patch Test" para determinadas condições geométricas (elemento trapezoidal) [57].

Nessa época, o Método de Deformação Assumida ("Assumed Strain Method") já havia sido usado com sucesso para corrigir uma deficiência do método isoparamétrico em outro elemento (**TRIA6**), e decidiu-se por aplicar esse novo método também para o elemento **QUAD4** do **MSC/ NASTRAN** em 1982 [57]. Esse método é usado para calcular a matriz de rigidez de cisalhamento e será explicado adiante.

4.5.1 Matriz de Rigidez - Cisalhamento

Neste elemento, temos a seguinte deformação devido ao cisalhamento

$$\mathbf{B}^s = \left\{ \begin{matrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \right\} = \mathbf{A}\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} \right\} \quad (4.146)$$

onde e_i , $i = 1, 2, 3, 4$ são os coeficientes de deformação indeterminados. A Figura 4.5 mostra a localização dos componentes de cisalhamento γ_k onde $k=1, 2, 3$ e 4 , que se situam nos pontos médios dos lados. A equação (4.146) e a rotação das coordenadas permitem determinar os componentes de cisalhamento em termos dos coeficientes de deformação. Portanto, para γ_1 tem-se que

$$\gamma_1 = \left\{ \begin{matrix} \cos(\delta_1) & y_1 \cos(\delta_1) & \sin(\delta_1) & x_1 \sin(\delta_1) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} \right\} \quad (4.147)$$

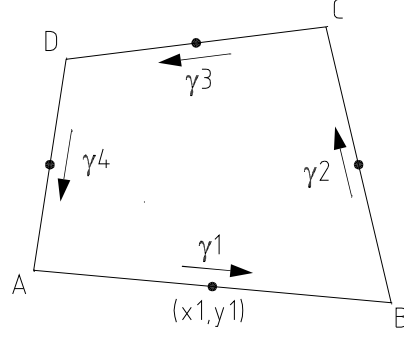


Figura 4.5: Geometria do elemento de placa do MacNeal.

onde δ_I é o ângulo entre o lado I e o eixo x .

Analogamente para os outros componentes e na forma matricial, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_1) & y_1 \cos(\delta_1) & \sin(\delta_1) & x_1 \sin(\delta_1) \\ \cos(\delta_2) & y_1 \cos(\delta_2) & \sin(\delta_2) & x_1 \sin(\delta_2) \\ \cos(\delta_3) & y_1 \cos(\delta_3) & \sin(\delta_3) & x_1 \sin(\delta_3) \\ \cos(\delta_4) & y_1 \cos(\delta_4) & \sin(\delta_4) & x_1 \sin(\delta_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \quad (4.148)$$

Para o cálculo dos componentes de cisalhamento, retoma-se a equação (3.21), em que $\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta$. Como a deformação gama varia linearmente por hipótese, podemos escrever que os componentes de cisalhamento são calculados da seguinte forma:

$$\gamma = \frac{(w_b - w_a)}{l_1} + \frac{(\theta_a + \theta_b)}{2} \quad (4.149)$$

onde $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor das rotações que é composto das componentes θ_x e θ_y . Calculando todos os componentes,

$$\gamma_1 = \frac{(w_4 - w_3)}{l_1} + \frac{(\theta_3 + \theta_4)}{2} \quad (4.150)$$

$$\gamma_2 = \frac{(w_1 - w_4)}{l_2} + \frac{(\theta_4 + \theta_1)}{2} \quad (4.151)$$

$$\gamma_3 = \frac{(w_1 - w_2)}{l_3} + \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \quad (4.152)$$

$$\gamma_4 = \frac{(w_2 - w_3)}{l_4} + \frac{(\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_3)}{2} \quad (4.153)$$

E matricialmente

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l_1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{l_1} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{l_2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l_2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{l_1} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l_1} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{l_3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{l_3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l_4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{l_4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \\ \theta_{x2} \\ w_3 \\ \theta_{y3} \\ \theta_{x3} \\ w_4 \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \quad (4.154)$$

Resumindo, tem-se que \mathbf{B}^s é dado por

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad (4.155)$$

onde \mathbf{e} é dado por

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{u} \quad (4.156)$$

Finalmente \mathbf{B}^s é obtido

$$\mathbf{B}^s = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{u} \quad (4.157)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez procede-se exatamente da mesma forma do que o primeiro elemento do R. H. MacNeal [56], conforme a equação do Apêndice (A.70), ou seja:

$$\mathbf{K}^s = (\mathbf{B}^s)^T (\mathbf{Z}^s + \mathbf{Z}^b)^{-1} \mathbf{B}^s \quad (4.158)$$

onde \mathbf{Z}^s é a matriz da flexibilidade devido ao cisalhamento e \mathbf{Z}^b é a *Matriz de Flexibilidade Residual de Flexão (Residual Bending Flexibility)*. A descrição e derivação destas matrizes

está feita de forma detalhada no Apêndice A, sendo que neste capítulo elas serão apresentadas de forma breve. A matriz \mathbf{Z}^s é calculada da seguinte maneira:

$$\mathbf{Z}^s = (\mathbf{V}^s)^{-1} (\mathbf{G}^s)^{-1} (\mathbf{V}^s)^{-1} \quad (4.159)$$

onde

$$\mathbf{V}^s = \begin{bmatrix} \sqrt{2J_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2J_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2J_4} \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

onde \mathbf{J}_1 é o jacobiano bi-dimensional no ponto (1). Para um elemento retangular, $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_4 = \Delta x \Delta y / 4$. O fator extra de dois sob o radical ocorre porque há somente dois pontos de integração para cada componente de deformação ao invés de quatro.

Para materiais isotrópicos tem-se que

$$\mathbf{G}^s = \begin{bmatrix} G_{11}^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{11}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{22}^s \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

onde

$$G_{11}^s = G_{22}^s = \frac{Ehk}{2(1+v)} \quad (4.162)$$

A matriz de flexibilidade residual de flexão é

$$\mathbf{Z}^b = \frac{1}{12AI_o} \begin{bmatrix} \frac{(1+a)\Delta x^2}{E_{11}} & \frac{(1+a)\Delta x^2}{E_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{(1+a)\Delta x^2}{E_{11}} & \frac{(1+a)\Delta x^2}{E_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+b)\Delta x^2}{E_{11}} & \frac{(1-b)\Delta x^2}{E_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{(1-b)\Delta x^2}{E_{11}} & \frac{(1+b)\Delta x^2}{E_{11}} \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

onde A é a área da superfície do elemento, I_o é o momento de inércia de flexão por unidade de largura; $\Delta x = 0,5(x_2 + x_3 - x_1 - x_4)$; $\Delta y = 0,5(y_3 + y_4 - y_1 - y_2)$ e E_{11} e E_{22} são os termos da diagonal na matriz de elasticidade usados para avaliar a rigidez a flexão. Para materiais isotrópicos $E_{11} = E_{22} = E/(1-v^2)$. Os coeficientes a e b foram obtidos através de experimentação numérica

$$a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}} \quad b = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \quad (4.164)$$

sendo que $\varepsilon = 0,04$. As matrizes \mathbf{Z}^b e \mathbf{Z}^s foram definidas em um artigo anterior de MacNeal [56], que apresenta a versão mais antiga deste elemento. A derivação da matriz de flexibilidade residual de flexão \mathbf{Z}^b está apresentada no apêndice A.

Esta versão mais antiga do **QUAD4** também foi implementado computacionalmente com sucesso. A sua implementação foi fundamental para obter a correta formulação de sua versão mais recente apresentada aqui [57], já que alguns de seus conceitos foram aproveitados (como por exemplo, a matriz de flexibilidade residual de flexão). Os resultados deste elemento, entretanto, não foram apresentados neste trabalho por se tratar de uma versão mais antiga do elemento.

Como ressaltado para o elemento do Bathe, é importante ainda destacar que o elemento **QUAD4** do **MSC/ NASTRAN** é um elemento de casca, e aqui implementou-se somente o caso particular deste elemento, que é o elemento de placa.

4.6 Motivação da escolha do ponto médio para calcular as componentes de cisalhamento

Como pode ser observado com relação à formulação dos elementos, com exceção do elemento do Belytschko, as deformações de cisalhamento são interpoladas a partir dos pontos médios dos lados, mostrando, portanto, uma tendência na formulação desse tipo de elemento.

Uma das motivações para escolha do ponto médio para avaliar as componentes de cisalhamento pode ser ilustrada através da viga de Timoshenko, que lida com a deformação de cisalhamento da mesma forma que a placa de Reissner/Mindlin.

Considerando um elemento de viga isoparamétrico de dois nós no modelamento de uma viga cantilever que está sujeita a somente um momento na extremidade livre. Assume-se assim que a deformação de cisalhamento é nula. As interpolações para o deslocamento transversal w e a rotação θ_y são dadas por:

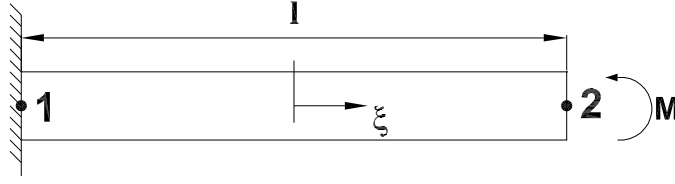


Figura 4.6: Elemento de viga de 2 nós representando um cantilever.

$$\theta_y = \frac{1+\xi}{2}\theta_{y2} \quad w = \frac{1+\xi}{2}w_2 \quad (4.165)$$

Assim, a deformação de cisalhamento é dada por:

$$\gamma = \frac{w_2}{l} + \frac{1+\xi}{2}\theta_{y2} \quad (4.166)$$

Para somente um momento aplicado, a deformação de cisalhamento deve ser zero. Impondo esta condição tem-se que:

$$0 = \frac{w_2}{l} + \frac{1+\xi}{2}\theta_{y2} \quad (4.167)$$

Entretanto, para que esta expressão seja nula ao longo de toda viga (ou seja, qualquer valor entre $-1 \leq \xi \leq 1$), tem-se claramente que $w_2 = \theta_{y2} = 0$. Assim, chega-se a situação inaceitável de que deformação de cisalhamento da viga só pode ser obtida quando não há nenhuma deformação.

De maneira similar, se usarmos dois pontos de gauss ($\xi = \pm 1/\sqrt{3}$) em que a deformação seja nula, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{l} - \frac{1+1/\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{l} - \frac{1-1/\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.168)$$

Como a matriz é não singular, a única solução é $w_2 = \theta_{y2} = 0$. Este é exatamente o resultado obtido anteriormente, porque impor a deformação de cisalhamento que varia linearmente igual a zero em dois pontos significa torná-la nula ao longo de todo o elemento.

Entretanto, pode-se tentar investigar o que acontece quando impõe-se a deformação de cisalhamento ser nula no ponto médio da viga (ou seja, $\xi = 0$). Neste caso, a seguinte relação

é obtida:

$$w_2 = \frac{\theta_{y2}}{2}l \quad (4.169)$$

Portanto se assumirmos uma deformação de cisalhamento constante de valor

$$\gamma = \frac{w_2}{l} + \frac{\theta_{y2}}{2} \quad (4.170)$$

um elemento mais conveniente é obtido.

Capítulo 5

Implementação Computacional

5.1 Introdução

Em muitos trabalhos, tem-se discutido as vantagens em termos de produtividade e qualidade no desenvolvimento de programas com a utilização do paradigma de orientação por objetos e linguagem C++. A implementação dos procedimentos numéricos tem sido feita através do desenvolvimento e extensão de uma base de programas em C++. O C++ oferece pleno suporte à programação orientada a objetos, incluindo-se os quatro pilares do desenvolvimento orientado a objetos: encapsulamento, ocultação de dados, herança e polimorfismo [54].

A utilização destes conceitos de programação permite aumentar a eficiência do ambiente de desenvolvimento, pois permite o acesso e manipulação dos dados do programa de maneira fácil e segura. Permite, além disso, a inclusão de novos funcionais de maneira rápida, simples e transparente.

No Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp está sendo desenvolvido um programa de elementos finitos chamado *MEFLAB++*, que é implementado em linguagem C++ e utiliza a Programação Orientada a Objetos. O *MEFLAB++* foi inicialmente concebido e criado pelos Professores Janito Vaqueiro Ferreira e Renato Pavanello. Atualmente, está sendo desenvolvido e utilizado por vários pesquisadores (Doutores, Mestres e alunos) do Departamento, permitindo a integração e sinergia entre as linhas de pesquisa que estão sendo desenvolvidas.

Graças ao conceito de orientação a objetos, o programa é dividido em módulos e à medida que os trabalhos são desenvolvidos, novos módulos são agregados. Além disso, a modula-

rização do programa permite o reaproveitamento dos módulos por diversos pesquisadores, o que acarreta em grande economia de tempo e esforço.

Devido a todas estas facilidades do *MEFLAB++*, neste trabalho foram necessários somente criar novos módulos com a formulação dos elementos de placa e criar os arquivos de dados de entrada para realização dos testes propostos. Os módulos que realizam a montagem da matriz de rigidez global, resolução das equações, e etc já estão prontos e por isso não há necessidade de serem refeitos.

Neste capítulo fazem-se inicialmente algumas considerações gerais sobre as fases do processo de desenvolvimento do *modelo orientado a objetos* para a resolução de um problema geral e na sequência aplica-se o modelo ao caso de formulação de elementos de placa desenvolvido neste trabalho.

5.2 Programação Orientada a Objetos

A Programação Orientada a Objetos é baseada no conceito de se criar uma implementação computacional que melhor adapte o computador à resolução de um problema. Este conceito se opõe ao utilizado em programações estruturadas convencionais, que modelam o problema em algo mais apropriado à máquina [74].

A estratégia de implementação da Programação Orientada a Objetos consiste em identificar os aspectos do seu problema relacionados a componentes físicos e conceituais, ou etapas a serem realizadas, que permitam a resolução do problema. Estes aspectos são organizados em pequenas partes, que podem vir a existir computacionalmente como entidades. Estas entidades são então representadas de forma única por objetos dentro do programa [68].

Todo o conhecimento de cada um dos objetos é armazenado em uma classe que é definida por um conjunto de variáveis de tipos diferentes e um conjunto de funções relacionadas às variáveis.

Essas classes podem estar relacionadas com outras classes através da utilização de heranças. Este relacionamento é caracterizado pela identificação de similaridades e diferenças entre objetos. Podem-se também estabelecer relações de uso e de posse [53].

Assim sendo, tem-se que as semelhanças entre objetos são agrupadas em classes de base

ou principais, ao passo que as diferenças são definidas em classes derivadas. Estas classes derivadas podem ser descritas como classes especializadas que herdam da classe de base as principais características, ou especificações, como métodos (que realizam alguma operação) e variáveis, e adicionalmente podem apresentar características próprias.

Uma vez definidas as classes, a Programação Orientada a Objetos compõe o problema em um conjunto de objetos, que se relacionam entre si. Esse relacionamento se dá através dos métodos da classe da qual eles foram instanciados. Assim sendo, os objetos são criados e comunicam-se entre si, recebendo e distribuindo tarefas, e após cada um cumprir o seu propósito, o problema estará resolvido.

5.3 Obtendo um Modelo de Objeto

Um bom modelo de objeto é conseguido através de um processo de desenvolvimento que possui três etapas, como segue [33]:

1. Análise Orientada a Objetos: é a fase onde um especialista descreve o problema em termos das necessidades e tarefas a serem resolvidas pelo programador.
2. Projeto Orientado a Objetos: é a fase de definição das classes e de suas variáveis e funções (métodos) que irão fazer a vinculação e a comunicação entre os objetos.
3. Programação Orientada a Objetos: é a fase de implementação, onde se tem a codificação dos métodos e funções, os testes e a integração do programa como um todo.

Em seguida, tem-se a aplicação das duas primeiras etapas descritas acima, no desenvolvimento do modelo de objeto para implementar a formulação dos elementos de placa.

Para auxiliar no desenvolvimento do programa *MEFLAB++*, utilizou-se uma base integrada de desenvolvimento chamada *Rational Rose*, um programa de engenharia de software, que fornece uma representação gráfica que permite um entendimento mais claro do programa em desenvolvimento.

No programa *Rational Rose* são criadas e definidas todas as classes do *MEFLAB++*, que possuem atributos e métodos, e as relações entre as mesmas (herança, posse e uso). Estas

informações formam a estrutura básica do programa. Em seguida, com um recurso existente no *Rational Rose*, esta estrutura é codificada automaticamente na linguagem C++. Após a criação da estrutura de base, a implementação dos métodos de cada classe é feita diretamente no Visual C++.

Várias notações podem ser usadas para auxiliar o programador a criar as classes e especificar as relações entre as mesmas. Neste trabalho usou-se a notação proposta por “*Booch*”, disponível no programa *Rational Rose*.

5.3.1 Análise Orientada a Objetos

Na fase de Análise Orientada a Objetos o problema deve ser descrito em termos das necessidades e tarefas que devem ser feitas para obter a sua resolução.

Para implementar a formulação de um elemento de placa, é preciso calcular a matriz de rigidez (\mathbf{K}^n) e o vetor de carga nodal equivalente (\mathbf{r}^n) do elemento. Retomando-se a equação, tem-se que a matriz de rigidez é dada por:

$$\mathbf{K}^n = \int_A (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{C}^b \mathbf{B}^b dA + \int_A (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{C}^s \mathbf{B}^s dA \quad (5.1)$$

Assim, o programa deve calcular as matrizes B^b , B^s , C^b e C^s e as integrais indicadas.

Para resolução de um problema de elementos finitos, outras etapas, no entanto, devem ser concluídas. Deve-se calcular o vetor carga nodal de cada elemento, realizar a montagem da matriz de rigidez e vetor de carga nodal globais da estrutura, estabelecer as condições de contorno e carregamento da estrutura e, finalmente, resolver o sistema de equações obtido. Todas essas etapas, graças a Programação Orientada a Objetos, já estavam implementadas no *MEFLAB++* e puderam ser reaproveitadas neste trabalho, conforme mencionado anteriormente. Como essas etapas já estão amplamente descritas na literatura [3, 30] e não foram objeto deste trabalho, não será feito maior detalhamento sobre as mesmas neste capítulo.

Portanto, somente o cálculo da matriz de rigidez do elemento será alvo do Projeto Orientado a Objetos descrito a seguir.

5.3.2 Projeto Orientado a Objetos

Para realizar os cálculos das matrizes B^b , B^s , C^b e C^s e das integrais indicadas acima, foram definidas 4 classes:

Classe *ShapeFunctionQuad*: responsável pelos cálculos das funções de forma bilineares e de suas derivadas, necessárias para o cálculo das matrizes B^b e B^s . Essa classe é filha (derivada) da classe mãe (base), que já estava implementada no *MEFLAB++*, chamada *ShapeFunction*. A classe mãe *ShapeFunction* é uma classe que possui os atributos (variáveis) e métodos básicos que todas as classes responsáveis pelos cálculos de função de forma devem ter, e que portanto devem ser herdadas da classe mãe. Assim, uma relação de herança é estabelecida entre as duas classes e sua representação em forma de Diagrama (e utilizando a notação "Booch") é apresentada na Figura 5.1.

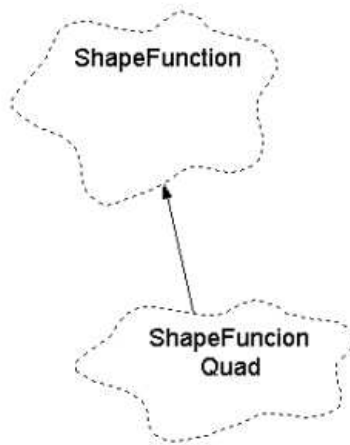


Figura 5.1: Diagrama de herança entre as classes responsáveis pelo cálculo das funções de forma.

A classe *ShapeFunctionQuad* possui 2 métodos: o método *give_ShapeFunctionAt*, que calcula o valor de variável nodal (deslocamento transversal ou rotação) para um determinado ponto no elemento; e o método *give_DerivativeShapeFunctionAt* que retorna o valor da derivadas das funções de forma em um determinado ponto. Como todos os elementos utilizam funções de forma bilineares, a mesma classe foi usada.

Classe *Quad4geoBathe*: esta classe é responsável pela parte geométrica do elemento do Bathe, por exemplo. Procedendo-se de forma análoga para os demais elementos, a mesma

classe para o elemento do Hughes, por exemplo, seria *Classe Quad4geoHughes*. Por motivo de economia, somente as classes do elemento do Bathe serão mencionadas neste capítulo.

Nesse tipo de classe, em outros elementos já implementados no *MEFLAB++* são calculados a área, momentos de inércia, a posição do centróide, o jacobiano, o inverso do jacobiano e o determinante do jacobiano do elemento. Neste trabalho, no entanto, somente o jacobiano, o inverso do jacobiano e o determinante do jacobiano do elemento precisavam ser calculados. Essa classe é uma classe filha da classe mãe, que já estava implementada no *MEFLAB++*, chamada *GeoElement*, que é uma classe que possui os atributos e métodos básicos de todas as classes que lidam com a parte geométrica do elemento, conforme indica a Figura 5.2.

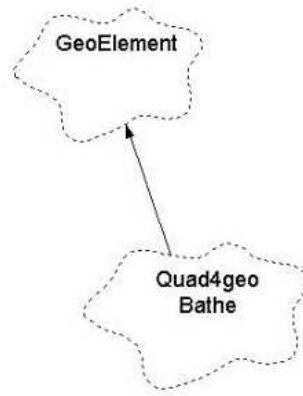


Figura 5.2: Diagrama de herança entre as classes que lidam com a parte geométrica dos elementos.

Os 3 métodos implementados nessa classe são: *give_Jacobian*, que calcula o Jacobiano do elemento; *give_InvJacobian*, que calcula a matriz inversa do Jacobiano do elemento; e *give_JacobianDet*, que calcula o determinante do Jacobiano. Para que estes cálculos sejam possíveis, é necessário usar o método *give_DerivativeShapeFunctionAt* da classe *ShapeFunctionQuad*, conforme indicado na equação (4.6). Como todas as classes derivadas da classe *GeoElement* necessitam desse método, há uma relação tipo *usa* entre a classe *GeoElement* e a classe *ShapeFunction*, conforme ilustrado na Figura 5.3.

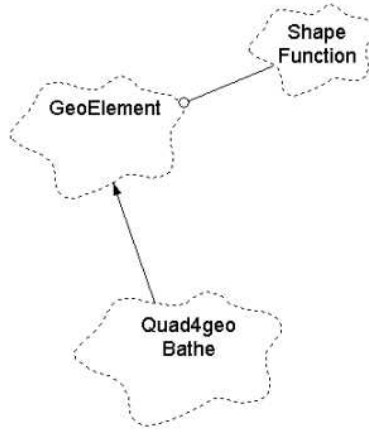


Figura 5.3: Diagrama das relações da classe *Quad4geoBathe*.

Classe *PlateBathe*: essa classe é responsável por calcular os operadores diferenciais, ou seja, as matrizes \mathbf{B}^b e \mathbf{B}^s , que referem-se as matrizes deformação-deslocamento para os efeitos de flexão e cisalhamento, respectivamente. Essa classe é filha da classe já implementada no *MEFLAB++* chamada *DifferentialOperator*, que é uma classe que possui os atributos e métodos básicos que todas as classes que calculam os operadores diferenciais devem ter.

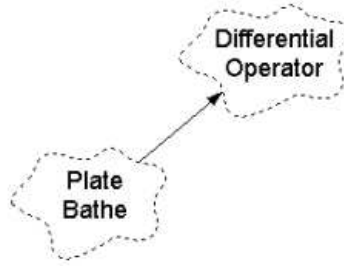


Figura 5.4: Diagrama de herança da classe *PlateBathe*.

Essa classe possui 2 métodos: *give_theMatrixBat*, que calcula a matriz \mathbf{B}^b ; e *give_theMatrixBshear*, que calcula a matriz \mathbf{B}^s . Para estes cálculos, os 2 métodos invocam os métodos *give_DerivativeShapeFunction* e *give_ShapeFunctionAt* da classe *ShapeFunction* e o método *give_InvJacobian* da classe *Quad4geoBathe*, conforme indicado previamente nas formulações dos elementos.

Assim, para tornar possível o uso desses métodos, além da relação de herança com a classe *DifferentialOperator*, a classe *PlateBathe* estabelece uma relação tipo *usa* com as classes

ShapeFunction e *PhyElement*, conforme indicado na Figura 5.5.

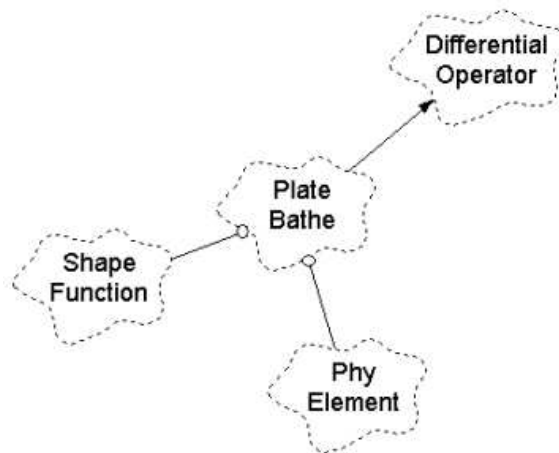


Figura 5.5: Diagrama das relações da classe *PlateBathe* com as demais classes

Classe *Quad4phyBathe*: essa classe é responsável pela parte física do elemento. Nesse tipo de classe, em outros elementos já implementados no *MEFLAB++* são calculadas as tensões, as deformações, a rigidez e a massa do elemento. Neste trabalho, no entanto, somente a rigidez necessitava ser implementada. Essa classe é filha da classe *PhyElement*, conforme indica a Figura 5.6.

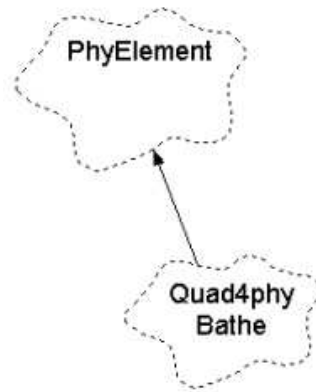


Figura 5.6: Diagrama de herança entre as classes que lidam com a parte física do elemento.

O método que calcula a rigidez do elemento chama-se *give_Stiffness*, que retorna a matriz de rigidez do elemento, levando em conta tanto o efeito da flexão quanto do cisalhamento. Para tanto, *give_Stiffness* chama por 6 métodos: *give_theMatrixBat* e *give_theMatrixBshear* da classe *PlateBathe*; o método *give_JacobianDet* da classe *Quad4geoBathe*; o método *give_*

ConstitutiveMatrix da classe *PlaneStress*, que é filha da classe *MaterialBehaviour*; e *give_GaussPoints* e *give_GaussWeights* da classe *GaussIntegration*.

Conforme explicado anteriormente, os 2 primeiros métodos são usados para calcular as matrizes B^b e B^s , conforme indica a equação (5.1). O determinante do jacobiano, calculado pelo método *give_JacobianDet*, é usado para efetuar o cálculo da integral indicada também na equação (5.1), de acordo com a teoria isoparamétrica [3]. O método *give_ConstitutiveMatrix* é utilizado para calcular as matrizes constitutivas C^b e C^s . Finalmente os dois últimos métodos, *give_GaussPoints* e *give_GaussWeights*, são usados para fazer a integração numérica pelo método de Gauss.

Assim, para ter acesso a esses métodos, além da relação de herança com a classe *PhyElement*, a classe *Quad4phyBathe* estabelece uma relação tipo *usa* com as classes *DifferentialOperator*, *GeoElement* e *MaterialBehaviour*, conforme indicado na Figura 5.7.

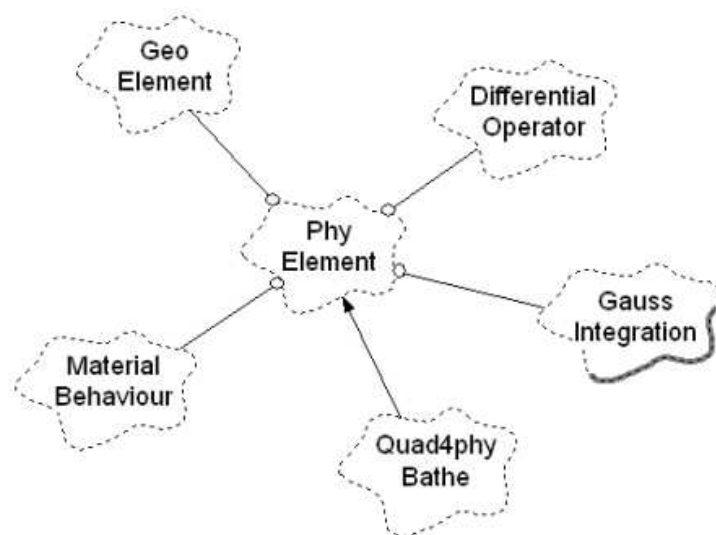


Figura 5.7: Diagrama da class *PhyElement*.

Capítulo 6

Análise Comparativa e de Desempenho

6.1 Introdução

O MEF é um método de aproximação numérico e portanto seus resultados apresentam erros. Assim, os pesquisadores, ao longo tempo, criaram vários testes objetivando validar novos elementos finitos. Os testes devem ser capazes de apresentar todos os parâmetros que influenciam a precisão do elemento [69]. Esses testes devem ajudar desenvolvedores a criar novos elementos finitos que assegurem bom desempenho em diferentes tipos de aplicação.

Erros nos resultados dos elementos podem ser decorrentes da presença de *modos espúrios de energia*, *travamento* e erros elementares como a violação das propriedades de corpo rígido e etc. Os parâmetros que podem afetar a precisão são o tipo de carregamento externo, geometria do elemento, geometria do problema a que o conjunto de elementos é submetido, propriedades do material e etc. Cuidado deve ser tomado para testar elementos de formas não convencionais envolvendo a variação de "*aspect ratio*" (relação entre o maior e menor lado de um retângulo), elementos com ângulos internos pequenos, elementos com forma trapezoidal e etc.

A maioria dos testes propostos pelas publicações de novos elementos apresentam problemas que são: (a) geralmente aborda-se um número insuficiente de condições testadas (b) poucos resultados são reportados, e (c) os resultados não são comparados com os resultados de outros elementos, particularmente com aqueles de outros programas comerciais [57]. Os mesmos problemas não estariam presentes em um conjunto de testes padrão que seja cuida-

dosamente criado e aplicado a diversos elementos diferentes. Neste sentido é possível afirmar que a especificação de um conjunto de testes requer um planejamento cuidadoso.

Objetivando especificar este conjunto de testes, R. H. MacNeal [61] e K. Mallikarjuna Rao [69], entre outros autores, propuseram em seus artigos um conjunto de testes para avaliar o desempenho dos elementos existentes e orientar o desenvolvimentos de novos elementos no futuro.

Baseado nesses dois artigos indicados acima e também nos testes para validação dos elementos de placa implementados, bem como outros elementos destes mesmos autores, identificou-se um conjunto de testes que será aplicado aos elementos estudados neste trabalho.

Esse conjunto não tem como proposta contemplar todas as condições possíveis de teste, mas sim que seja um conjunto que contenha os testes mais importantes de acordo com a literatura descrita acima.

Assim, os testes que serão descritos e aplicados neste trabalho são: placa retangular, *patch test*, viga retilínea, viga curva, placa circular e teste de autovalores. A motivação e os resultados de cada teste serão detalhados a seguir.

Um importante parâmetro que influencia a performance dos elementos é a razão da espessura da placa (h) sobre o comprimento do lado menor da placa (a). De acordo com Zienkiewicz [87], conforme a espessura e conseqüentemente as deformações de cisalhamento aumentam, os elementos que usam a teoria de placa espessa são capazes de levar a resultados melhores dos que os obtidos por elementos que utilizam a teoria de placa delgada. Isso se deve ao fato de que a teoria de placa delgada, conforme visto anteriormente, despreza as deformações de cisalhamento, enquanto que na teoria de placa espessa as mesmas são consideradas.

Também de acordo com Zienkiewicz [87], o limite da aplicabilidade da teoria clássica de placa delgada de Kirchhoff, é a razão, (h/a) , de $1/100$. Se a razão for maior que $1/100$ a teoria da placa delgada não é mais apropriada. Já a teoria de placa espessa de Reissner-Mindlin, por considerar a deformação por cisalhamento, apresenta uma aplicabilidade maior, até uma razão de aproximadamente $1/10$.

Embora os elementos implementados utilizem a teoria de Reissner-Mindlin, os testes serão feitos dentro do limite de aplicabilidade da teoria de placa delgada ($h/a < 1/100$). O motivo é que todos os testes feitos nos artigos dos elementos implementados, bem como em toda bibliografia estudada, utilizam os resultados de teoria de Kirchhoff para avaliar o desempenho dos elementos. Assim, a mesma abordagem foi utilizada neste trabalho.

Outro aspecto importante que deve ser mencionado, antes de apresentar os testes implementados, é a validação dos elementos. A validação, aqui, refere-se a reprodução exata dos resultados dos testes publicados nos artigos de cada elemento [7, 78, 43, 57]. Tal procedimento objetivou garantir a correta implementação computacional feita no presente trabalho.

6.2 Patch Test

A principal virtude do *Patch Test* é: se um elemento produzir resultados corretos no teste, os resultados para qualquer problema resolvido com o elemento convergirão em direção à solução correta conforme o elemento seja subdividido. A razão é que a tensão em cada elemento tende a um valor uniforme no limite. Muitos autores, inclusive Irons [48, 46], pensam que um elemento que não passa no *Patch Test* não é confiável. Por outro lado, a aprovação no *Patch Test* não garante que o elemento seja bom, pois a taxa de convergência pode ser muito baixa para uso prático [61].

De acordo com Bathe [3], se as condições de compatibilidade (conformidade) das variáveis físicas e as condições de uma aproximação completa forem satisfeitas, a solução calculada convergirão para a energia de deformação exata monotonicamente. Adotar uma aproximação completa significa conduzir um elemento a representar bem os modos de corpo rígido (sem que a matriz de rigidez do elemento apresente *modos espúrios de energia nulos*) e de representar os estados de deformação constantes. Este requisito deve ser sempre satisfeito, segundo Bathe [3].

Sabe-se que na prática, no entanto, observa-se freqüentemente que elementos finitos com desempenho satisfatório são obtidos mesmo que os requisitos de continuidade sejam violados. Assim, o requisito de compatibilidade pode ser relaxado com o custo de perda de uma solução monotonicamente convergente, garantindo, entretanto, que o requisito de aproximação com-

pleta seja preservado.

Em alguns elementos incompatíveis (não conformes) que atendam o requisito de aproximação completa, especial atenção deve ser dispendida para um detalhe. Embora um único elemento seja capaz de representar todos os estados de deformação constante, quando o elemento é usado em um conjunto de elementos, incompatibilidades entre eles podem impedir a representação de estados constantes de deformação do meio contínuo. O *Patch Test*, portanto, permite a investigação sobre se um conjunto de elementos não conformes atende ao requisito de aproximação completa.

Basicamente, o *Patch Test* permite determinar se um elemento satisfaz o requisito de aproximação completa, e deve ser principalmente empregado em elementos que utilizam procedimentos não convencionais (como por exemplo integração reduzida ou funções de forma incompatíveis). De acordo com Hughes [36], o *Patch Test* seria o teste mais útil para se avaliar o comportamento dos elementos.

Nota-se que elementos distorcidos geometricamente de uma maneira arbitrária são uma parte essencial do teste [61]. Como a geometria dos elementos pode influenciar nos resultados, 2 *Patch Tests* com geometrias diversas foram selecionados, dos artigos do MacNeal [61] e Belytschko [78].

O primeiro *Patch Test* implementado neste trabalho, descrito no artigo do MacNeal [61], e mostrado na Figura 6.1, foi usado por Robinson [72, 73] para testar elementos finitos comerciais. As coordenadas dos nós são mostradas na Tabela 6.1.

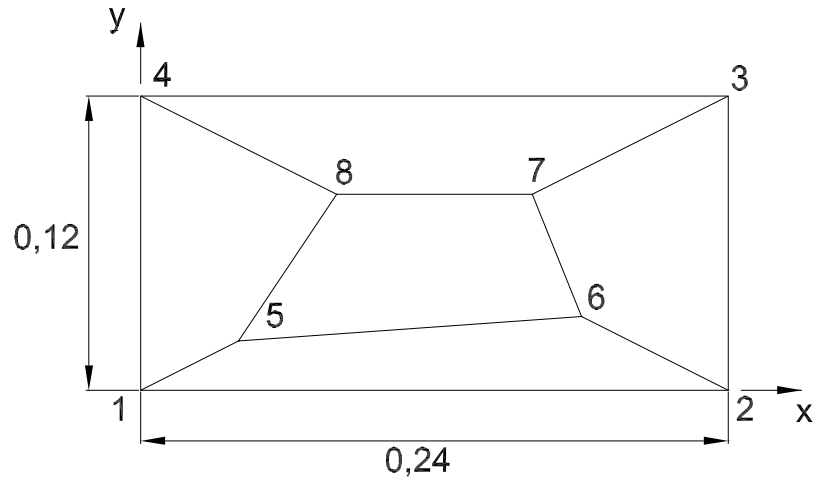


Figura 6.1: *Patch Test 1* para elementos de placa.

Tabela 6.1: Coordenadas dos nós do *Patch Test 1*.

Número do Nó	Coordenada x	Coordenada y
5	0,04	0,02
6	0,18	0,03
7	0,16	0,08
8	0,08	0,08

O segundo teste implementado neste trabalho está presente no artigo do Belytschko [78], conforme mostrado na Figura 6.2, e as coordenadas dos nós são mostradas na Tabela 6.2.

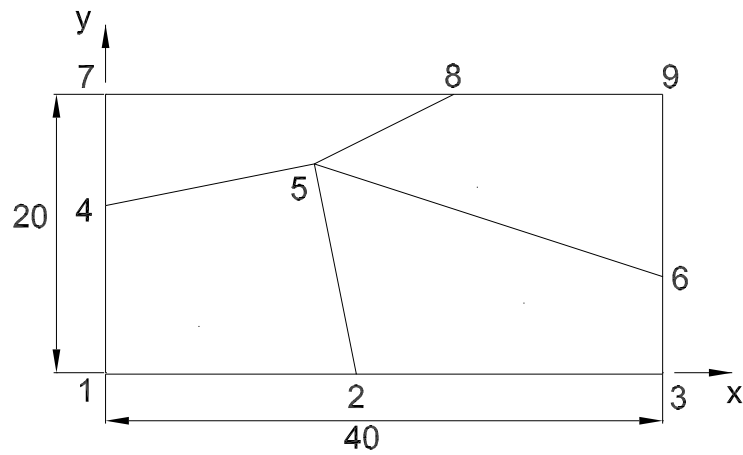


Figura 6.2: *Patch Test 2* para elementos de placa.

Tabela 6.2: Coordenadas dos nós do *Patch Test 2*.

Número do Nó	Coordenada x	Coordenada y
2	18	0
4	0	12
5	15	15
6	40	7
8	25	20

Utilizaram-se condições de contorno de deslocamento porque é mais simples de especificar que as condições de contorno de força e momento. As condições de contorno são dadas pelas equações abaixo e foram aplicadas aos dois testes. Além disso, as condições de contorno são aplicadas aos nós do contorno e os nós internos ficam sem nenhum carregamento.

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{10^{-3} (x^2 + xy + y^2)}{2} \\
 \theta_x &= 10^{-3} (y + x/2) \\
 \theta_y &= 10^{-3} (-x - y/2)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

A avaliação, se o elemento passa no *Patch Test*, é feita exatamente avaliando-se os resultados dos nós internos. Se os deslocamentos e rotações destes estiverem em conformidade com as mesmas equações usadas para definir as condições de contorno então o elemento passa no *Patch Test*. Conformidade, aqui, significando exatamente os mesmos valores, permitindo somente ruídos associados às limitações numéricas do computador [30].

Todos os 4 elementos implementados passaram em ambos os testes. Entretanto, conforme mencionado anteriormente, a aprovação no *Patch Test* não garante que o elemento seja bom, pois a taxa de convergência pode ser muito baixa para uso prático.

6.3 Teste da Placa Retangular

O teste da placa retangular é um dos testes mais freqüentemente utilizados na literatura, sendo considerado um dos testes padrão para este tipo de elemento [57]. Todos os elementos implementados neste trabalho apresentam esta avaliação em seus artigos. Nesse teste, a placa retangular é submetida a uma força transversal, sendo aplicada de forma concentrada no

centro da placa ou uniforme ao longo de toda a superfície da placa, que também é suportada de duas formas: ou é engastada em todo o contorno, ou é simplesmente apoiada, em que somente o deslocamento transversal é restringido e as rotações são livres.

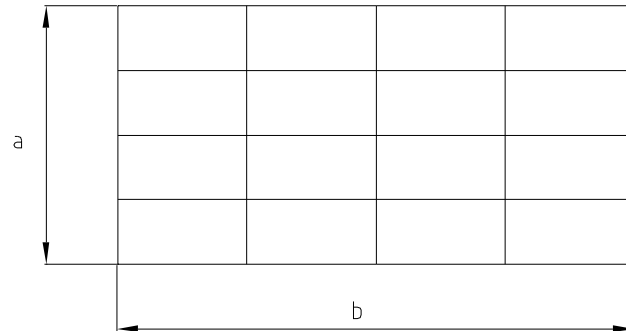


Figura 6.3: Placa retangular com malha de 16 elementos.

Os dados fixos para todas as condições testadas são: $E = 17472000, 0$, $\nu = 0,3$ e $Lado\ a = 2,0$. Entretanto, outros parâmetros são variados como: espessura h , refinamento da malha, carregamento, suporte, "*aspect ratio*" (razão entre os lados a e b) e distorção geométrica das malhas. A Tabela 6.3 mostra como estes parâmetros foram variados.

Tabela 6.3: Resumo das condições testadas.

Razão entre os lados (b/a)	Carga	Suporte	Tabela
1	Concentrada	Engastado	6.4
		Simplesmente Apoiado	
	Uniforme	Engastado	
		Simplesmente Apoiado	
5	Concentrada	Engastado	6.5
		Simplesmente Apoiado	
	Uniforme	Engastado	
		Simplesmente Apoiado	

Para cada uma das condições (linhas) descritas na Tabela 6.3 são testadas 3 espessuras ($h_1 = 10^{-2}$, $h_2 = 10^{-3}$ e $h_3 = 10^{-4}$) e 3 malhas com refinamentos diferentes (malha com 16, 64 e 256 elementos para discretizar a placa inteira), totalizando portanto 9 testes para cada linha da tabela.

Vários pontos importantes no desempenho dos elementos são avaliados nesse teste. O primeiro deles é a precisão para várias condições diferentes de carga, suporte, malha, espessura

e etc, totalizando 72 testes para cada elemento, conforme mostra as Tabelas 6.4 e 6.5.

Além da precisão, outro aspecto importante verificado é a presença do fenômeno descrito na literatura como *travamento por cisalhamento* (*shear locking*), em que as soluções obtidas com o elemento divergem da solução exata da teoria clássica de Kirchhoff em aplicações de placa e casca muito delgada, resultando em modelos erroneamente rígidos, conforme descrito anteriormente.

Outro ponto importante avaliado nesse teste é a convergência dos resultados dos elementos para o resultado teórico de placas delgadas através do maior refinamento da malha, já que todas as condições serão avaliadas com 3 malhas diferentes: com 16, 64 e 256 elementos como será mostrado adiante.

A seguir, são apresentados os resultados dos testes indicados na Tabela 6.3. Todos os resultados apresentados mostram o erro relativo entre os resultados obtidos pelos elementos e o resultado da teoria clássica de Kirchhoff, encontrado no livro do Timoshenko sobre placas e cascas [82], referente ao deslocamento transversal no ponto central da placa.

Tabela 6.4: Razão entre os lados (b/a)=1.

Parâmetros				Elementos - Erro Relativo Percentual			
Carga	Suporte	Malha	Espessura	Bathe	Belytschko	Hughes	MacNeal
Concentrada	Engastado	16 elementos	10^{-2}	-13,4%	-13,4%	-13,4%	-11,8%
			10^{-3}	-13,5%	-13,5%	-13,5%	-11,9%
			10^{-4}	-13,5%	-13,5%	-13,5%	-11,9%
		64 elementos	10^{-2}	-3,4%	-3,4%	-3,4%	-3,0%
			10^{-3}	-3,5%	-3,5%	-3,5%	-3,1%
			10^{-4}	-3,5%	-3,5%	-3,5%	-3,1%
		256 elementos	10^{-2}	-0,7%	-0,7%	-0,7%	-0,6%
			10^{-3}	-0,8%	-0,8%	-0,8%	-0,7%
			10^{-4}	-0,8%	-0,8%	-0,8%	-0,7%
	Simplesmente Apoiado	16 elementos	10^{-2}	-0,7%	-0,7%	-0,7%	5,5%
			10^{-3}	-0,8%	-0,8%	-0,8%	5,4%
			10^{-4}	-0,8%	-0,8%	-0,8%	5,4%
		64 elementos	10^{-2}	-0,5%	-0,5%	-0,5%	1,2%
			10^{-3}	-0,5%	-0,5%	-0,5%	1,1%
			10^{-4}	-0,5%	-0,5%	-0,5%	1,1%
		256 elementos	10^{-2}	-0,1%	-0,1%	-0,1%	0,3%
			10^{-3}	-0,2%	-0,2%	-0,2%	0,3%
			10^{-4}	-0,2%	-0,2%	-0,2%	0,3%
Uniforme	Engastado	16 elementos	10^{-2}	-15,9%	-15,9%	-15,9%	-14,7%
			10^{-3}	-15,9%	-15,9%	-15,9%	-14,8%
			10^{-4}	-15,9%	-15,9%	-15,9%	-14,8%
		64 elementos	10^{-2}	-0,7%	-0,7%	-0,7%	-0,3%
			10^{-3}	-0,7%	-0,7%	-0,7%	-0,4%
			10^{-4}	-0,7%	-0,7%	-0,7%	-0,4%
		256 elementos	10^{-2}	0,2%	0,2%	0,2%	0,3%
			10^{-3}	0,1%	0,1%	0,1%	0,2%
			10^{-4}	0,1%	0,1%	0,1%	0,2%
	Simplesmente Apoiado	16 elementos	10^{-2}	-11,1%	-11,1%	-11,1%	-8,4%
			10^{-3}	-11,1%	-11,1%	-11,1%	-8,4%
			10^{-4}	-11,1%	-11,1%	-11,1%	-8,4%
		64 elementos	10^{-2}	-0,4%	-0,4%	-0,4%	0,3%
			10^{-3}	-0,5%	-0,5%	-0,5%	0,3%
			10^{-4}	-0,5%	-0,5%	-0,5%	0,3%
		256 elementos	10^{-2}	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%
			10^{-3}	-0,1%	-0,1%	-0,1%	0,1%
			10^{-4}	-0,1%	-0,1%	-0,1%	0,1%

A seguir são apresentados as Figuras 6.4 e 6.5, que contemplam os resultados da Tabela 6.4, objetivando uma melhor visualização dos mesmos. A Figura 6.4 apresenta todos os resultados da Tabela 6.4 para carga concentrada, enquanto que a Figura 6.5 os resultados

para carga uniforme. Como não há mudança significativa nos resultados quando a espessura é alterada, essas duas Figuras foram feitas utilizando-se os resultados para espessura igual a 10^{-4} . A mesma observação foi feita para os demais testes, e portanto, todas as Figuras contemplando resultados utilizam a mesma espessura.

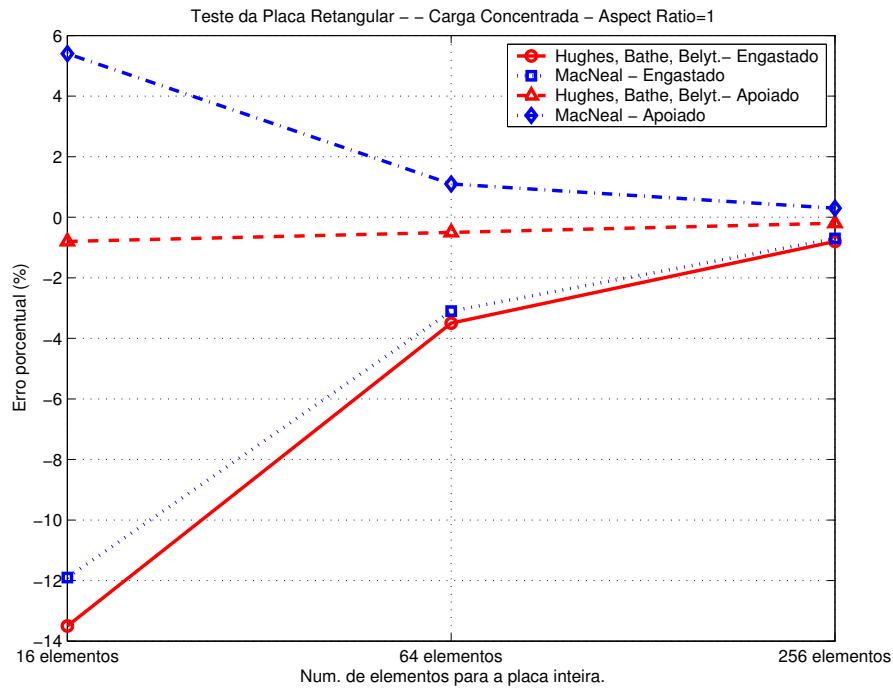


Figura 6.4: Resultados do Teste da Placa Retangular - Carga Concentrada - Razão entre os lados $(b/a)=1$

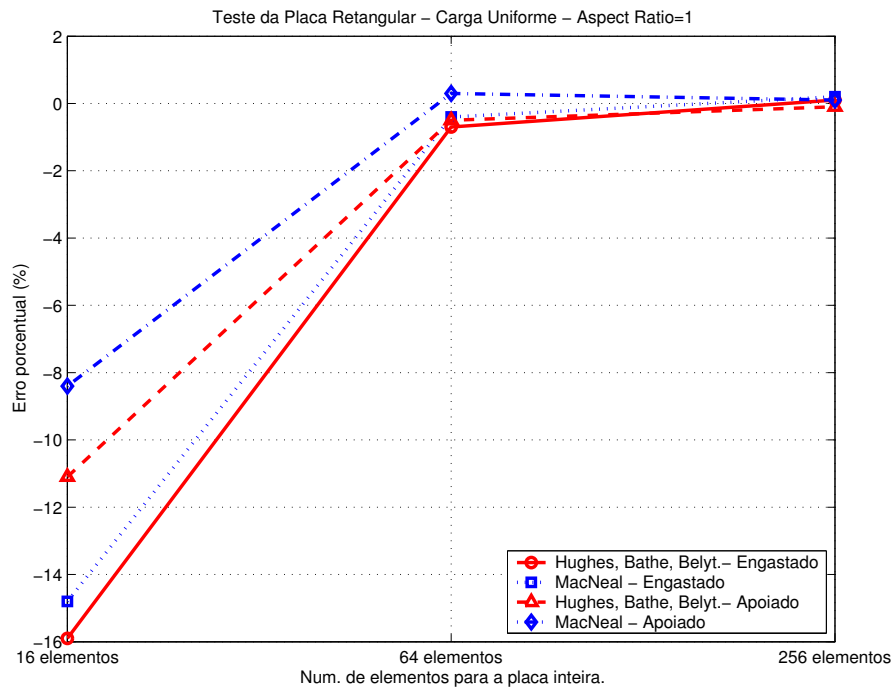


Figura 6.5: Resultados do Teste da Placa Retangular - Carga Uniforme - Razão entre os lados $(b/a)=1$

Tabela 6.5: Razão entre os lados (b/a)=5.

Parâmetros				Elementos - Erro Relativo Percentual			
Carga	Suporte	Malha	Espessura	Bathe	Belytschko	Hughes	MacNeal
Concentrada	Engastado	16 elementos	10^{-2}	-68,1%	-68,1%	-68,1%	-56,2%
			10^{-3}	-68,2%	-68,2%	-68,2%	-56,3%
			10^{-4}	-68,2%	-68,2%	-68,2%	-56,3%
		64 elementos	10^{-2}	-17,4%	-17,4%	-17,4%	-13,8%
			10^{-3}	-17,5%	-17,5%	-17,5%	-13,9%
			10^{-4}	-17,5%	-17,5%	-17,5%	-13,9%
		256 elementos	10^{-2}	-5,3%	-5,3%	-5,3%	-4,4%
			10^{-3}	-5,4%	-5,4%	-5,4%	-4,5%
			10^{-4}	-5,4%	-5,4%	-5,4%	-4,5%
	Simplesmente Apoiado	16 elementos	10^{-2}	-15,6%	-15,6%	-15,6%	-1,8%
			10^{-3}	-15,6%	-15,6%	-15,6%	-1,8%
			10^{-4}	-15,6%	-15,6%	-15,6%	-1,8%
		64 elementos	10^{-2}	-7,2%	-7,2%	-7,2%	-0,1%
			10^{-3}	-7,2%	-7,2%	-7,2%	-0,1%
			10^{-4}	-7,2%	-7,2%	-7,2%	-0,1%
		256 elementos	10^{-2}	-2,3%	-2,3%	-2,3%	0,5%
			10^{-3}	-2,3%	-2,3%	-2,3%	0,5%
			10^{-4}	-2,3%	-2,3%	-2,3%	0,5%
Uniforme	Engastado	16 elementos	10^{-2}	12,4%	12,4%	12,4%	47,2%
			10^{-3}	12,4%	12,4%	12,4%	47,2%
			10^{-4}	12,4%	12,4%	12,4%	47,2%
		64 elementos	10^{-2}	-3,3%	-3,3%	-3,3%	3,0%
			10^{-3}	-3,3%	-3,3%	-3,3%	2,9%
			10^{-4}	-3,4%	-3,4%	-3,4%	2,9%
		256 elementos	10^{-2}	0,2%	0,2%	0,2%	1,8%
			10^{-3}	0,1%	0,1%	0,1%	1,7%
			10^{-4}	0,1%	0,1%	0,1%	1,7%
	Simplesmente Apoiado	16 elementos	10^{-2}	-2,9%	-2,9%	-2,9%	-0,1%
			10^{-3}	-2,9%	-2,9%	-2,9%	-0,2%
			10^{-4}	-2,9%	-2,9%	-2,9%	-0,2%
		64 elementos	10^{-2}	-2,2%	-2,2%	-2,2%	-0,8%
			10^{-3}	-2,2%	-2,2%	-2,2%	-0,9%
			10^{-4}	-2,2%	-2,2%	-2,2%	-0,9%
		256 elementos	10^{-2}	-0,5%	-0,5%	-0,5%	-0,2%
			10^{-3}	-0,5%	-0,5%	-0,5%	-0,2%
			10^{-4}	-0,5%	-0,5%	-0,5%	-0,2%

A seguir, são apresentados as Figuras 6.6 e 6.7, que contemplam os resultados da Tabela 6.5. A Figura 6.6 apresenta todos os resultados da Tabela 6.5 para carga concentrada, enquanto que a Figura 6.7 os resultados para carga uniforme.

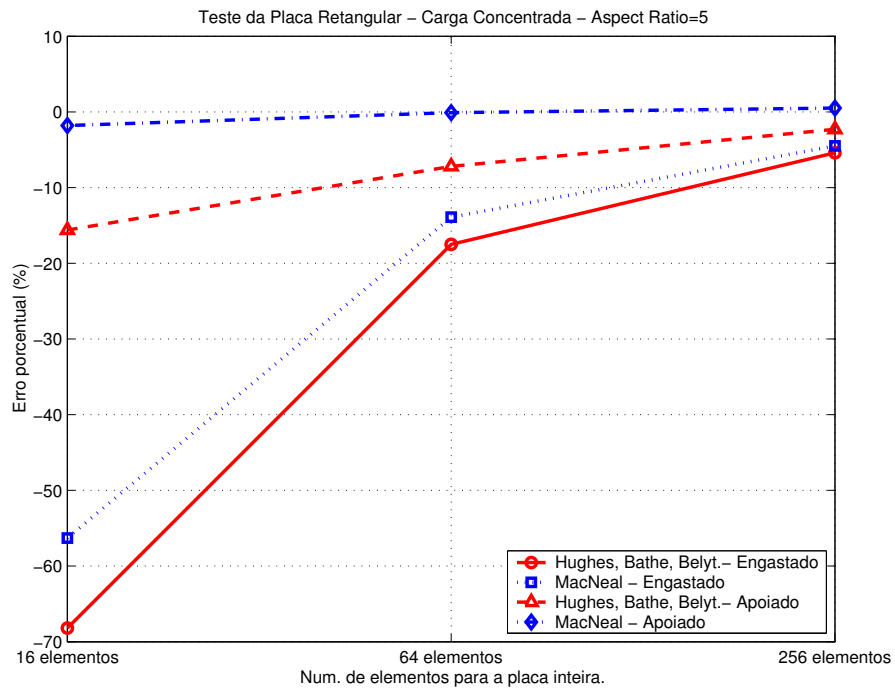


Figura 6.6: Resultados do Teste da Placa Retangular - Carga Concentrada - Razão entre os lados $(b/a)=5$

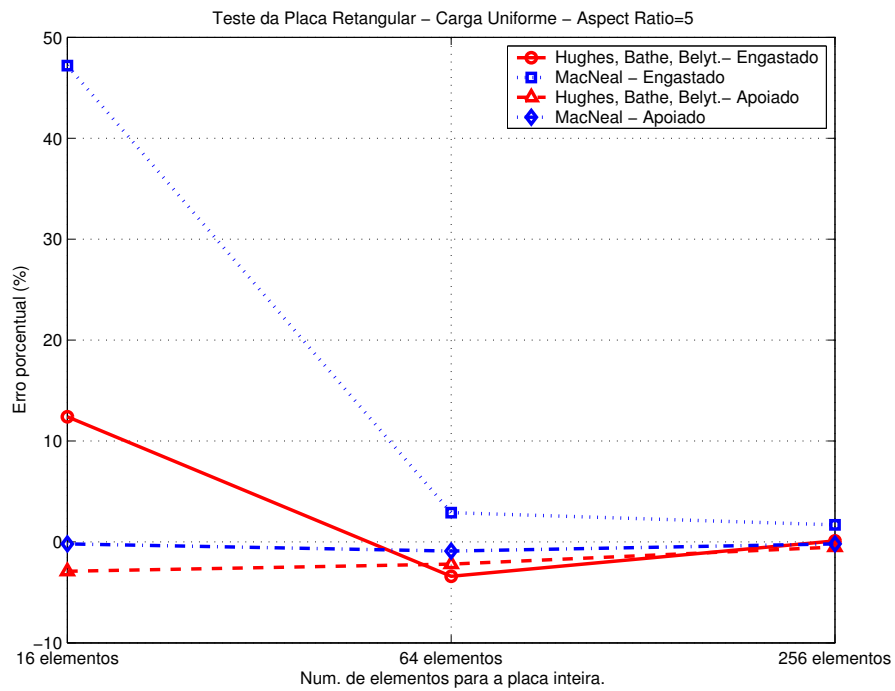


Figura 6.7: Resultados do Teste da Placa Retangular - Carga Uniforme - Razão entre os lados $(b/a)=5$

Dos resultados obtidos, algumas conclusões já podem ser delineadas. Para todas as condições avaliadas em que os elementos apresentavam o formato de um quadrado (*"aspect ratio=1"*), os elementos do Bathe, Belytschko e Hughes apresentam praticamente os mesmos resultados, aparecendo diferenças somente no sétimo algarismo significativo. O elemento do MacNeal apresenta resultados diferentes para todas as configurações.

Para o caso de elemento retangular (com *Aspect Ratio=5*), o mesmo nível de semelhança permanece somente entre os elementos do Belytschko e do Hughes. Para esse caso, o elemento do Bathe apresenta resultados diferentes a partir do quarto algarismo significativo, apresentando portanto resultados ainda bem próximos .

Para se ter uma idéia do desempenho de cada elemento, levando-se em conta todos os resultados das condições já apresentadas, calculou-se o erro médio para as malhas de 16, 64 e 256 elementos para toda a placa. Para cada uma dessas malhas, somou-se o erro de cada elemento obtido para todas as configurações testadas (tipo de suporte, carga e *"aspect ratio"*). Assim, foram obtidos três erros médios para cada elemento conforme mostra a Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Erro percentual médio por nível de refinamento de malha.

Parâmetros	Elementos - Erro Médio Percentual			
Malha Total	Bathe	Belytschko	Hughes	MacNeal
16 elementos	17,5%	17,5%	17,5%	18,3%
64 elementos	4,4%	4,4%	4,4%	2,8%
256 elementos	1,2%	1,2%	1,2%	1,0%

Os resultados obtidos nas várias configurações não permitem identificar um elemento que seja melhor para uma determinada condição, sem que houvesse influência das demais. Assim, por exemplo, não é possível indicar que para carga concentrada, não importando as demais condições (como tipo de suporte, espessura e etc), haja um elemento mais indicado.

A única tendência geral, que pode ser observada, foi que o erro médio, conforme mostrado na Tabela 6.6, para os elementos Bathe, Belytschko e Hughes são praticamente os mesmos. Já o elemento do MacNeal, apresentou um comportamento médio inferior (4,6%) para a malha menos refinada (16 elementos). Já para as malhas mais refinadas de 64 e 256 elementos, o elemento do MacNeal apresentou comportamento significativamente melhor, 57,6% e 20%,

respectivamente. Assim, pode-se concluir que o elemento do MacNeal apresentou, de maneira geral, comportamento superior aos demais elementos.

Um ponto importante observado foi que todos os elementos convergiram para a solução exata com o refinamento da malha para todas as condições testadas.

Outro estudo foi feito para avaliar o comportamento dos elementos com as suas formas distorcidas geometricamente, conforme descrito no artigo do MacNeal [56], e mostrado na Figura 6.8. Essa avaliação foi feita somente na condição de malha com 64 elementos para toda a placa e carga concentrada no centro da mesma. Os testes foram feitos somente variando-se a espessura e o tipo de suporte, conforme mostra a Tabela 6.7. Os demais parâmetros como módulo de elasticidade, E , e o coeficiente de poisson, ν , permanecem os mesmos.

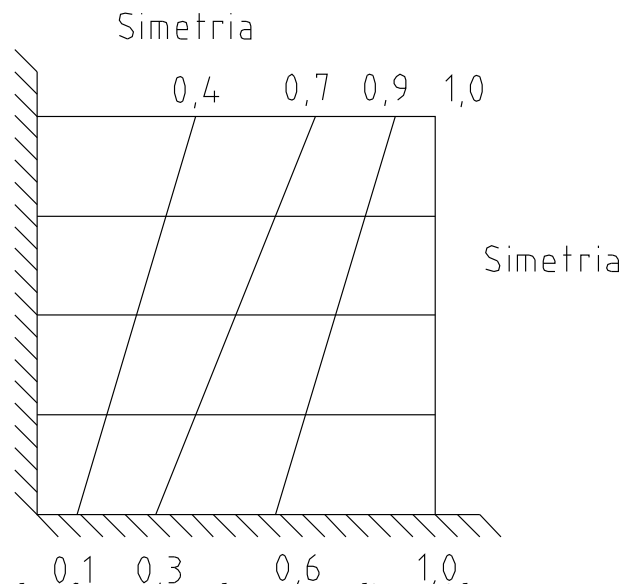


Figura 6.8: Malha para 1/4 da placa com elementos distorcidos geometricamente, em que são aplicadas as condições de simetria.

Tabela 6.7: Elementos distorcidos geometricamente.

Parâmetros		Elementos - Erro Relativo Percentual			
Suporte	Espessura	Bathe	Belytschko	Hughes	MacNeal
Engastado	10^{-2}	-2,5%	-2,5%	-2,5%	-2,2%
	10^{-3}	-2,7%	-2,7%	-2,7%	-2,3%
	10^{-4}	-2,7%	-2,7%	-2,7%	-2,3%
Simplesmente Apoiado	10^{-2}	0,3%	0,3%	0,3%	1,3%
	10^{-3}	0,3%	0,3%	0,3%	1,3%
	10^{-4}	0,3%	0,3%	0,3%	1,3%

Para esse caso de elementos distorcidos geometricamente, os do Bathe, Belytschko e Hughes apresentam resultados iguais até o quinto algarismo significativo. Já o elemento do MacNeal, como para todas as outras configurações, apresenta resultados diferentes. Para o caso de suporte engastado, o elemento do MacNeal apresentou desempenho ligeiramente superior, enquanto que para o suporte simplesmente apoiado, sua precisão foi significativamente inferior.

Outra importante conclusão obtida foi que para nenhuma condição testada e para nenhum dos elementos implementados ocorreu a presença do *travamento por cisalhamento*. Além disso, para as 3 espessuras avaliadas em todas as condições de teste, nenhuma mudança significativa nos resultados foi observada.

6.4 Teste da Viga Retilínea

O teste da viga retilínea, mostrado na Figura 6.9, é freqüentemente usado e pode ser aplicado a elementos de viga, placa e sólidos. A sua principal qualidade é a simplicidade e o fato de que todos os principais modos de deformação são invocados quando os carregamentos são aplicados na extremidade livre. Além disso, são testadas configurações com elementos deformados geometricamente, objetivando testar tais formas com os modos de deformação variando linearmente [61].

Os dados do problema-teste são: $E = 10^7$, $\nu = 0,3$, *comprimento* = 6,0, *largura* = 0,2, *espessura* = 0,1, carregamento com força transversal ao plano da viga e com valor unitário aplicado na extremidade livre da viga; malha com 6x1 elementos.

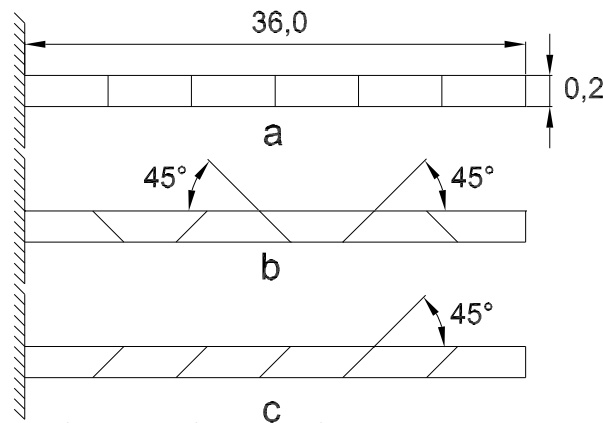


Figura 6.9: Viga retilínea discretizada em 6 elementos com o mesmo volume: (a) Elementos retangulares (b) Elementos trapezoidais (c) Elementos inclinados.

Os únicos parâmetros que variam nesse teste é a forma geométrica dos elementos (retangular, trapezoidal e inclinado, conforme mostra a Figura 6.9) e a espessura. Os resultados são mostrados na Tabela 6.8.

A seguir são apresentados os resultados do teste. Todos eles mostram o erro relativo entre os resultados obtidos pelos elementos e o resultado da teoria clássica de Kirchhoff, referente ao deslocamento transversal na extremidade livre da viga.

Tabela 6.8: Resultados do teste da viga retilínea.

Parâmetros		Elementos - Erro Relativo Percentual			
Geometria do Elemento	Espessura	Bathe	Belytschko	Hughes	MacNeal
Regular	10^{-2}	-0,7%	-0,7%	-0,7%	0,0%
	10^{-3}	-0,7%	-0,7%	-0,7%	0,0%
	10^{-4}	-0,7%	-0,7%	-0,7%	0,0%
Trapezoidal	10^{-2}	-3,1%	-3,1%	-3,1%	-0,8%
	10^{-3}	-3,1%	-3,1%	-3,1%	-0,8%
	10^{-4}	-3,1%	-3,1%	-3,1%	-0,8%
Inclinado	10^{-2}	-1,0%	-1,0%	-1,0%	0,3%
	10^{-3}	-1,0%	-1,0%	-1,0%	0,3%
	10^{-4}	-1,0%	-1,0%	-1,0%	0,3%

Os elementos do Bathe, Belytschko e Hughes apresentam resultados iguais somente até o terceiro algarismo significativo. Para as 3 formas geométricas testadas, o elemento do MacNeal apresentou resultados expressivamente melhores, conforme mostrado na Figura 6.10.

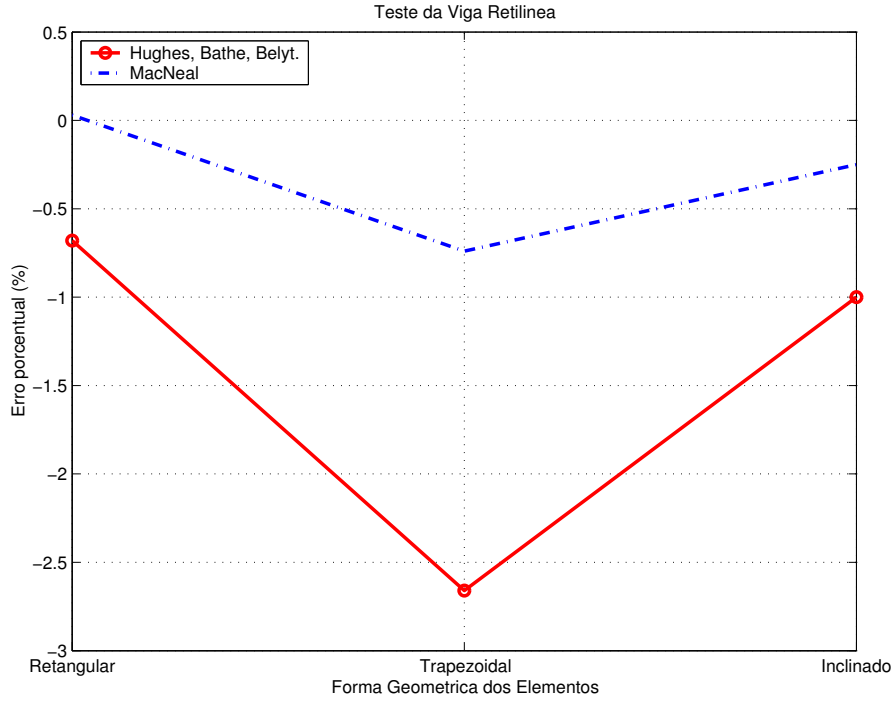


Figura 6.10: Resultados do Teste da Viga Retilínea

6.5 Teste da Viga Curvilínea

No teste de viga curvilínea, combinações dos principais modos de deformação são invocados quando os carregamentos são aplicados na extremidade livre, com elementos levemente deformados geometricamente.

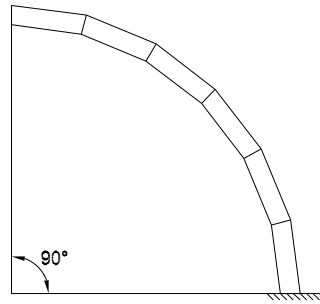


Figura 6.11: Viga Curvilínea.

Os dados do problema-teste são: $E = 10^7$, $\nu = 0,25$, $arco = 90^\circ$, $raio_{externo} = 4,32$, $raio_{interno} = 4,12$, $h = 0,1$, carregamento com força transversal ao plano da viga e com valor unitário aplicado na extremidade livre da viga; malha com 6x1 elementos de mesmo volume.

A seguir, são apresentados os resultados do teste. Novamente, todos eles mostram o erro relativo entre os resultados obtidos pelos elementos e o resultado da teoria clássica presente no artigo do MacNeal [61], referente ao deslocamento transversal na extremidade livre da viga.

Tabela 6.9: Resultados do teste da Viga Curvilínea.

Elementos - Erro Relativo Percentual			
Bathe	Belytschko	Hughes	MacNeal
12,62%	5,79%	5,79%	12,52%

Para esse teste, os elementos do Hughes e do Belytschko apresentam resultados semelhantes e significativamente melhores que os elementos do Bathe e do MacNeal, que também apresentam resultados próximos.

6.6 Teste da Placa Circular

Esse teste serve para avaliar tanto a performance do elemento com formas geométricas irregulares, bem como para analisar a convergência através do refinamento da malha (12, 48 e 192 elementos para a placa inteira) para essa configuração geométrica, conforme mostrado na Figura 6.12. Também várias condições de espessura foram testadas, incluindo espessuras muito pequenas. Como consequência, o *travamento por cisalhamento* (*shear locking*) também é verificado para elementos irregulares. Finalmente duas configurações de suporte da placa circular foram testadas: simplesmente apoiada e engastada. Devido às condições de simetria, somente 1/4 da placa foi discretizado.

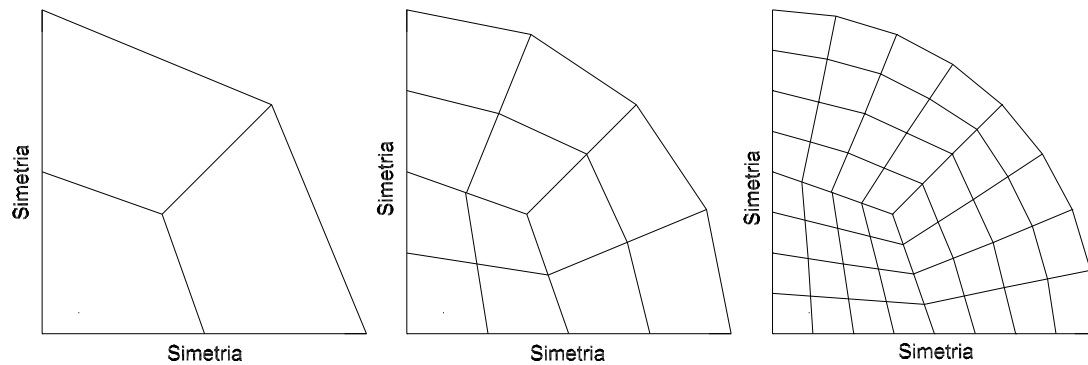


Figura 6.12: Malhas de Placa Circular. Somente um quadrante é discretizado devido a simetria.

Os dados do problema-teste são: $E = 1092000$, $\nu = 0,3$, $raio = 5$ e carregamento com forças perpendicular ao plano da viga e com valor unitário no centro da placa. Os resultados são mostrados na Tabela 6.10:

Todos os resultados mostram o erro relativo entre os resultados obtidos pelos elementos e o resultado da teoria clássica de Kirchhoff, encontrado no livro do Timoshenko sobre placas e cascas [82], referente ao deslocamento transversal no ponto central da placa.

Tabela 6.10: Resultados do teste da placa circular.

Parâmetros			Elementos - Erro Relativo Percentual			
Núm. de Elem.	Suporte	Espessura	Bathe	Belytschko	Hughes	MacNeal
12 elementos	Simplesmente Apoiado	0,01	-1,7%	-1,7%	-1,7%	5,4%
		0,001	-1,7%	-1,7%	-1,7%	5,4%
		0,0001	-1,7%	-1,7%	-1,7%	5,4%
	Engastado	0,01	-21,4%	-21,4%	-21,4%	-3,3%
		0,001	-21,4%	-21,5%	-21,4%	-3,3%
		0,0001	-21,4%	-21,5%	-21,4%	-3,3%
48 elementos	Simplesmente Apoiado	0,01	-0,4%	-0,4%	-0,4%	2,3%
		0,001	-0,4%	-0,5%	-0,4%	2,3%
		0,0001	-0,4%	-0,5%	-0,4%	2,3%
	Engastado	0,01	-5,2%	-5,2%	-5,2%	1,0%
		0,001	-5,2%	-5,2%	-5,2%	1,0%
		0,0001	-5,2%	-5,2%	-5,2%	1,0%
192 elementos	Simplesmente Apoiado	0,01	-0,2%	-0,2%	-0,2%	0,6%
		0,001	-0,2%	-0,2%	-0,2%	0,6%
		0,0001	-0,2%	-0,2%	-0,2%	0,6%
	Engastado	0,01	-1,4%	-1,4%	-1,4%	0,2%
		0,001	-1,4%	-1,4%	-1,4%	0,2%
		0,0001	-1,4%	-1,4%	-1,4%	0,2%

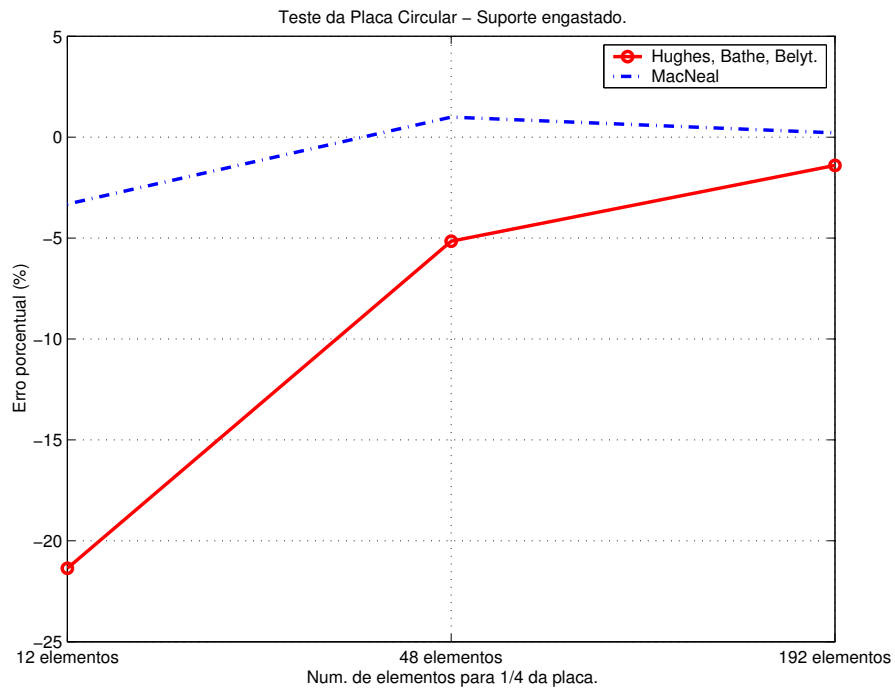


Figura 6.13: Resultados do Teste da Placa Circular - Suporte Engastado

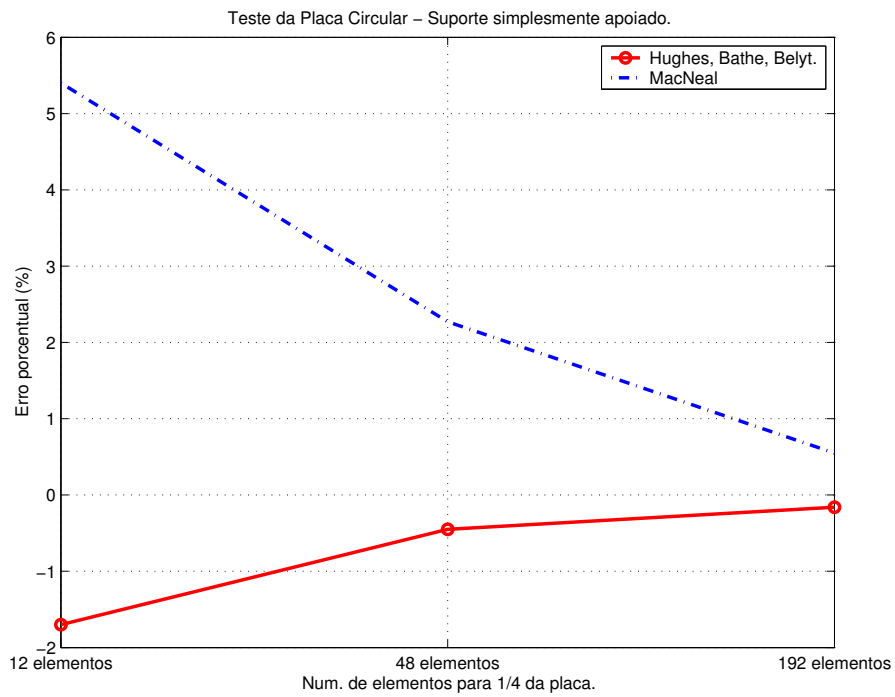


Figura 6.14: Resultados do Teste da Placa Circular - Suporte Simplesmente Apoiado

Os elementos do Bathe, Belytschko e Hughes apresentam resultados iguais até o quinto

algarismo significativo. Comparando-se o desempenho semelhante desses 3 elementos com o elemento do MacNeal, pode-se observar com base nas Figuras 6.13 e 6.14, que o elemento do MacNeal apresenta desempenho visivelmente superior para o caso em que o suporte é engastado e inferior para o caso em que o suporte é simplesmente apoiado, para as 3 malhas testadas. Portanto, não é possível indicar um elemento com melhor desempenho para esse teste.

6.7 Teste de Autovalores

Como comentado anteriormente no Capítulo 3, a integração reduzida, embora produza melhoras sensíveis na performance de elementos de placa e casca, pode criar um outro fenômeno indesejado chamado de *modos de energia nula* ou com *deficiência de posto*, que podem introduzir erros e resultar em uma solução instável.

Um elemento que apresenta modos espúrios de energia é dito ser *deficiente de posto*. Nesse caso, o posto da matriz de rigidez do elemento $[\mathbf{K}^e]$ (definido na introdução) é menor que o número de graus de liberdade do elemento menos o número de modos rígidos [30]. A presença desses *modos espúrios* pode ser identificada através de um teste de autovalores, que também é capaz de verificar se o elemento é capaz de representar os modos rígidos do elemento.

O teste de autovalores consiste em calcular o número de *modos espúrios* de um elemento. Para tanto, basta calcular o número de autovalores nulos da matriz de rigidez e subtrair o número de modos de corpos rígidos, que também resultam em autovalores nulos. O resultado é igual ao número de *modos espúrios de energia nula* presentes no elemento [36].

As matrizes de rigidez calculadas para obter os autovalores foram obtidas a partir de elementos deformados geometricamente. As geometrias dos elementos usados neste teste são idênticas as utilizadas no Patch Test. Assim foram feitos nove testes para o elemento de cada autor: 5 testes baseado nas geometrias dos elementos da Figura 6.1 e 4 testes baseados nos elementos da Figura 6.2.

Neste trabalho, nenhum dos elementos implementados apresentou *modos espúrios* e todos são capazes de representar os modos de corpos rígidos.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões de Continuidade

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões a respeito do trabalho desenvolvido, bem como sugestões de linhas de pesquisa para futuros trabalhos.

7.1 Conclusões

Objetivando fundamentar as discussões das formulações dos elementos e introduzir a notação utilizada neste trabalho, foi feita uma breve revisão das principais idéias envolvidas na teoria clássica de placas delgadas de Kirchhoff e da teoria de placa espessa de Reissner/Mindlin.

As formulações completas das matrizes de rigidez dos 4 elementos propostos, dos autores Bathe, MacNeal, Hughes e Belytschko, foram obtidas com sucesso e foram apresentadas de uma forma detalhada e clara, permitindo a reprodução desses elementos por outros pesquisadores de uma maneira mais fácil.

A implementação computacional de todos os elementos foi concluída e a validação foi feita com sucesso, de acordo com os resultados dos testes publicados nos artigos. A implementação foi feita em uma plataforma de software criada no Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica chamada *MEFLAB++*. Técnicas de programação orientada a objetos, utilizando a linguagem C++, foram usadas. Também foi apresentada de maneira detalhada a forma pela qual a implementação foi feita, o que possibilitará a reprodução e otimização de modelo usado (classes, seus métodos e as relações entre

as mesmas) por outros pesquisadores.

A utilização do ambiente de desenvolvimento MEFLAB++ permite a reutilização desse trabalho, de maneira mais eficiente por alunos e professores do Departamento em futuras pesquisas, contribuindo de maneira significativa para a integração e sinergia entre as linhas de pesquisa que estão sendo desenvolvidas.

Um conjunto de testes padrão para elementos placa foi identificado com base na ampla literatura estudada. Esse conjunto não contempla todos os testes de placa existentes na literatura, mas contempla alguns dos mais importantes. Tal conjunto poderá servir como auxílio no desenvolvimento de novos elementos de placa ou na proposição de modificações dos elementos existentes.

Baseadas nos testes realizados, as principais conclusões obtidas sobre o desempenho dos elementos finitos foram:

- De uma forma geral nenhum dos elementos apresentou os problemas de *travamento por cisalhamento* e *modos espúrios de energia nula*, em todas as diferentes condições de contorno, espessura e distorção geométrica. Além disso, todos os elementos foram capazes de representar de forma correta os modos de corpo rígido. Assim, pode-se dizer que todos passaram pelo teste de Autovalores.
- Todos os elementos convergiram para a solução exata obtida da teoria clássica de Kirchhoff quando se aumentou o grau de refinamento da malha, para todas as condições de contorno testadas. Ainda no que se refere à convergência, todos os elementos passaram no *Patch Test*, que é considerado o principal teste para avaliar a convergência, para elementos com forma irregulares e campo constante de deformação.
- Novamente, todos os elementos atendem aos requisitos de compatibilidade (apresentam funções de forma compatíveis) e de aproximação completa, conforme descrito anteriormente.
- Para o teste da Placa Circular, não se pode determinar um elemento com melhor desempenho, já que para cada tipo de suporte usado (engastado ou simplesmente apoiado), um elemento apresentou melhor comportamento.

- No teste da Placa Retangular, quando os elementos implementados foram testados na forma de um quadrado, os elementos do Bathe, Belytschko e Hughes apresentaram praticamente os mesmos resultados, aparecendo diferenças somente no sétimo algarismo significativo. A mesma semelhança ocorreu entre os elementos do Belytschko e do Hughes para o caso de elementos retangulares (*Aspect Ratio=5*). Para esse caso, o elemento do Bathe apresenta resultados diferentes a partir do quarto algarismo significativo, apresentando portanto, resultados ainda bem próximos. Levando-se em consideração todas as configurações testadas, o elemento do MacNeal apresentou, de maneira geral, comportamento superior aos demais elementos.
- No teste da Viga Retilínea, o elemento do MacNeal apresenta resultados visivelmente melhores para todas os formatos e geometrias testadas. Novamente os elementos do Bathe, Belytschko e Hughes apresentam resultados próximos, sendo iguais até o terceiro algarismo significativo.

Com relação à formulação dos elementos, com exceção do elemento do Belytschko, as deformações de cisalhamento são interpoladas a partir dos pontos médios dos lados, mostrando, portanto, uma tendência na formulação desse tipo de elemento.

Outra semelhança pertinente notada entre os elementos reside no fato de que o método de interpolações mistas do elemento do Bathe, da mesma forma que o elemento do MacNeal, baseia-se também em campos de deformação assumidos para o efeito do cisalhamento. Já entre os demais elementos (Hughes e Belytschko), também uma característica comum é observada: ambos buscam reproduzir os modos de Kirchhoff nos deslocamentos nodais.

Alguns autores, como por exemplo Bathe [7], acreditam que as formulações dos elementos não se devem basear em fatores de ajuste numérico, já que a performance do elemento pode ser boa somente para determinadas condições em que o ajuste foi pensado. O elemento do MacNeal, entretanto, apresenta esse fator e para os testes realizados, de uma maneira geral, não se observou desempenho inferior. Não obstante, não há garantias de que para qualquer configuração geométrica e/ou de condições de contorno esse ajuste seja adequado.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Este trabalho permitiu conhecimento sobre as formulações de elementos de placa, seus respectivos desempenhos e a identificação de um conjunto de testes padrão, servindo para formar uma base sólida para o desenvolvimento de novas técnicas e propor modificações para melhorar o desempenho dos elementos estudados e/ ou a proposição de novos elementos de placa em futuras pesquisas.

Além disso, para melhor entender o funcionamento e as diferenças entre cada elemento, para cada teste feito, seria interessante mostrar graficamente os modelos deformados. Seria uma ferramenta muito importante para visualizar melhor as diferenças causadas pelas diferentes formulações dos elementos.

Outra extensão interessante para este trabalho seria a implementação e análise de elementos de casca, de forma similar a feita neste trabalho para elementos de placas, já que para análise de cascas ainda não foi possível obter uma formulação que permita a comprovação matemática de convergência, como acontece nas placas, havendo grande dificuldade, portanto, em obter-se um elemento confiável [64]. Tal estudo poderia fornecer um embasamento teórico, que permitiria, possivelmente, dar contribuições para superar algumas das dificuldades existentes nesta linha de pesquisa.

Bibliografia

- [1] A. Adini and R. W. Clough. Analysis of plate bending by the finite element method. *National Science Foundation*, page G7337, 1961.
- [2] S. Ahmad. *Curved Finite Elements in the Analysis of Solid, Shell and Plate Structures*. PhD thesis, University of Wales, Swansea, 1969.
- [3] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [4] K. J. Bathe. The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers & Structures*, 79(2):243–252, 2001.
- [5] K. J. Bathe, M. L. Bucalem, and F. Brezzi. Displacement and stress convergence of our mitc plate elements. *Engineering Computations*, 7:291–302, 1990.
- [6] K. J. Bathe and E. Dvorkin. Our discrete-kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis- an assessment. *Computers and Structures*, 16:89–98, 1983.
- [7] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin. A four-node plate bending element based on min-dlin/ reissner plate theory and mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:367–383, 1985.
- [8] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin. A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:697–722, 1986.
- [9] K. J. Bathe, A. Iosielvich, and D. Chapelle. An evaluation of the mitc shell elements. *Computers & Structures*, 75(1):1–30, 2000.

- [10] K. J. Bathe, A. Iosielvich, and D. Chapelle. An inf-sup test for shell finite elements. *Computers & Structures*, 75(5):439–456, 2000.
- [11] T. Belytschko. Review of recent developments in plate and shell elements. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division (Symposia-Series)*, 75:217–231, 1986.
- [12] T. Belytschko and W. E. Bachrach. Efficient implementation of quadrilateral with high coarse-mesh accuracy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54:279–301, 1986.
- [13] T. Belytschko, L. W. Bak, and H. Y. Chiang. Advances in one-point quadrature shell elements. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 96(1):93–107, 1992.
- [14] T. Belytschko, L. W. Bak, and H. Stolarski. Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrange shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(2):385–414, 1989.
- [15] T. Belytschko and L. P. Bindeman. Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 88(3):311–340, 1991.
- [16] T. Belytschko and I. Leviathan. Physical stabilization of the 4-node shell element with one point quadrature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113(3-4):321–350, 1994.
- [17] T. Belytschko and I. Leviathan. Projection schemes for one-point quadrature shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115(3-4):277–286, 1994.
- [18] T. Belytschko and W. K. Liu. Test problems and anomalies in shell finite elements. *Reliability of Methods for Engineering Analysis. Proceedings of the International Conference*, pages 393–406, 1986.

- [19] T. Belytschko, W. K. Liu, J. S. Ong, and J. M. Kennedy. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43:251–276, 1984.
- [20] T. Belytschko, W. K. Liu, J. S. Ong, and D. Lam. Implementation and application of a 9-node lagrange shell element with spurious mode control. *Computers & Structures*, 20:121–128, 1985.
- [21] T. Belytschko, J. S. Ong, and W. K. Liu. A consistent control of the spurious singular modes in the 9-node lagrange element for the laplace and mindlin plate equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 44:269–295, 1984.
- [22] T. Belytschko, H. Stolarski, and N. Carpenter. A c^0 triangular plate element with one point quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:787–802, 1984.
- [23] T. Belytschko and C. S. Tsay. A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 19:405–419, 1983.
- [24] T. Belytschko, C. S. Tsay, and W. K. Liu. A stabilization matrix for the bilinear mindlin plate element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29:313–327, 1981.
- [25] F. Brezzi and L. D. Marini. A nonconforming element for the reissner-mindlin plate. *Computers and Structures*, 81:515–522, 2003.
- [26] D. Briassoulis. On the basics of the shear locking problem of c super 0 isoparametric plate elements. *Computers & Structures*, 33(1):169–185, 1989.
- [27] M. L. Bucelem and K. J. Bathe. High-order mitc general shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3729–3754, 1993.
- [28] D. Chapelle and K. J. Bathe. The inf-sup test. *Computers & Structures*, 470:537–545, 1993.

- [29] D. Chapelle and K. J. Bathe. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computers & Structures*, 66:19–36, 1998.
- [30] R. D. Cook. *Concepts and applications of Finite Elements Analysis*. John Wiley & Sons, third edition, 1989.
- [31] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling fracture in mindlin-reissner plates with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48):7161–7183, 2000.
- [32] E. N. Dvorkin and K. J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations*, 1:77–88, 1984.
- [33] J. V. Ferreira. *Dynamic Response Analysis of structures with nonlinear components*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, Department of Mechanical Engineering., 1998.
- [34] W. R. Harn and T. Belytschko. Adaptive multi-point quadrature for elastic-plastic shell elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 30(4):253–278, 1998.
- [35] M. M. Hrabok and T. M. Hrudey. A review and catalogue of plate bending finite elements. *Computers and Structures*, 19(3):479–495, 1984.
- [36] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [37] T. J. R. Hughes and M. Cohen. The heterosis finite element for plate bending. *Computers & Structures*, 9:445–450, 1978.
- [38] T. J. R. Hughes, M. Cohen, and M. Haroun. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis. *Nuclear Engineering and Design*, 46:206–222, 1978.
- [39] T. J. R. Hughes and L. P. Franca. Convergence of transverse-shear stresses in the finite-element analysis of plates. *Communications In Applied Numerical Methods*, 4:185–187, 1988.

- [40] T. J. R. Hughes and L. P. Franca. A mixed finite element formulation for reissner-mindlin plate theory: Uniform convergence of all higher-order spaces. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 67:223–240, 1988.
- [41] T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, and W. Kanoknukulchai. A simple and efficient finite element for plate bending. *ASME, International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11:1529–1543, 1977.
- [42] T. J. R. Hughes and T. L. Taylor. The linear triangular bending element. *Proc. Mafelap Conference*, 1981.
- [43] T. J. R. Hughes and T. E. Tezduyar. Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. *Journal Of Applied Mechanics-Transactions Of The Asme*, 48:587–596, 1981.
- [44] A. Iosilevich, K. J. Bathe, and F. Brezzi. On evaluating the inf-sup condition for plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(19):3639–3663, 1997.
- [45] A. Iosilevich, K. J. Bathe, and F. Brezzi. Numerical inf-sup analysis of mitc plate bending elements. *American Mathematical Society*, pages 225–242, 1999.
- [46] B. M. Irons and S. Ahmad. *Techniques of Finite Elements*. Wiley, New York, 1980.
- [47] B. M. Irons and J. K. Draper. Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution of plates in bending. *J. AIAA*, 3:5, 1965.
- [48] B. M. Irons and A. Razzaque. Experience with the patch test for convergence of finite elements. *Mathematical Foundations of the Finite Element Method*, pages 557–587, 1972.
- [49] G. Kirchhoff. über das gleich und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, 40:51–88, 1850.
- [50] P. Krysl and T. Belytschko. Analysis of thin plates by the element-free galerkin method. *Computational Mechanics*, 17(1-2):26–35, 1995.

- [51] D. Lasry and T. Belytschko. Transverse shear oscillations in four-node quadrilateral plate elements. *Computers & Structures*, 27:393–398, 1987.
- [52] S. H. Lee, T. Blacker, and T. Belytschko. Derivative recovery techniques for c super 0 plate problems. *Engineering Computations*, 11(6):495–512, 1994.
- [53] J. Liberty. *Teach yourself C++ in 24 hours*. Sams Publishing, 1997.
- [54] J. Liberty. *Aprenda em 24 horas C++ - Tradução: Ana Maria Netto Guz*. Campus, 1998.
- [55] W. Liu, Y. K. Hu, and T. Belytschko. Multiple quadrature underintegrated finite-elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(19):3263–3289, 1994.
- [56] R. H. MacNeal. A simple quadrilateral shell element. *Computers & Structures*, 8:175–183, 1978.
- [57] R. H. MacNeal. Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions. *Nuclear Engineering and Design*, 70:3–12, 1982.
- [58] R. H. MacNeal. *Finite Elements: Their Design and Performance*. Marcel Dekker, Inc., 1989.
- [59] R. H. MacNeal. On the limits of finite element perfectability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:1589–1601, 1992.
- [60] R. H. MacNeal. Perspective on finite elements for shell analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 30:175–186, 1998.
- [61] R. H. MacNeal and R. L. Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1:3–20, 1985.
- [62] R. H. MacNeal, C. T. Wilson, R. L. Harder, and C. C. Hoff. The treatment of shell normals in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 30:235–242, 1998.

- [63] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18:31–38, 1951.
- [64] S. H. S. Nóbrega. *Sobre o Desenvolvimento de Elementos Finitos de Casca: uma Classe de Formulações Mistas*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 1997.
- [65] D. L. C. Oliveira. *Formulação e Estudo de Confiabilidade de Elementos Finitos Mistos para o Modelo de Casca de Naghdi*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 1998.
- [66] H. Parish. A critical survey of the 9 node degenerated element with special emphasis on thin shell application and reduced integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20:323–350, 1979.
- [67] J. Pitkäranta. Mathematical and historical reflections on the lowest-order finite element models for thin structures. *Computers and Structures*, 81:895–909, 2003.
- [68] F. Pizzirani. Otimização topológica de estruturas utilizando algoritmos genéticos. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2001.
- [69] K. M. Rao and U. Shrinivasa. A set of pathological tests to validate new finite elements. *Sādhanā*, 26(6):549–590, 2001.
- [70] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 67:A69–A77, 1945.
- [71] E. Reissner. On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5:55–68, 1947.
- [72] J. Robinson and S. Blackham. An evaluation of lower order membranes as contained in the msc/ nastran, asas, and pafec fem systems. *Robinson and Associates*, 1979.

- [73] J. Robinson and S. Blackham. An evaluation of plate bending elements: Msc/ nastran, asas, pafec, ansys, and sap4. *Robinson and Associates*, 1979.
- [74] J. A. B. Silva. Investigação de um método evolucionário de otimização estrutural. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2001.
- [75] H. Stolarski and T. Belytschko. On the equivalence of mode decomposition and mixed finite elements based on the hellinger-reissner principal. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58(3):249–263, 1986.
- [76] H. Stolarski, T. Belytschko, and N. Carpenter. Bending and shear mode decomposition in c^0 structural elements. *Journal of Structural Mechanics*, 11(2):153–176, 1983.
- [77] H. Stolarski, T. Belytschko, and S. H. Lee. A review of shell finite elements and corotational theories. *Computational Mechanics*, 17(1-2):26–35, 1995.
- [78] H. Stolarski, N. Carpenter, and T. Belytschko. A kirchhoff-mode method for co bi-linear and serendipity plate elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50:121–145, 1985.
- [79] R. Szilard. *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [80] M. W. Taylor, V. V. Vasiliev, and D. A. Dillard. On the problem of shear-locking in finite elements based on shear deformable plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, 34(7):859–875, 1997.
- [81] A. Tessler and T. J. R. Hughes. An improved treatment of transverse shear in the mindlin-type four-node quadrilateral element. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 39:311–335, 1983.
- [82] S. Timoshenko and S. W. Krieger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, United States of America, second edition, 1959.

- [83] X. J. Wang and T. Belytschko. A study of stabilization and projection in the 4-node mindlin plate element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(10):2223–2228, 1989.
- [84] B. L. Wong and T. Belytschko. Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrange plane and plate elements. *Engineering Computations*, 4:229–239, 1987.
- [85] O. C. Zienkiewicz, E. D. L. Pugh, and E. Hinton. A study of quadrilateral plate bending elements with "reduced" integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1059–1079, 1978.
- [86] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw-Hill Book Company, London, fourth edition, 1988.
- [87] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 2. McGraw-Hill Book Company, London, fourth edition, 1988.
- [88] O. C. Zienkiewicz, J. Too, and R. L. Taylor. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3:275–290, 1971.

Apêndice A

Derivação da Matriz de Flexibilidade Residual de Flexão

Como dito anteriormente, a Matriz de Flexibilidade Residual de Flexão foi definida por MacNeal em 1978 [56]. Para entender a derivação dessa matriz, é necessário apresentar toda a formulação do mesmo.

Para o caso da flexão, modificações são necessárias para superar as deficiências da teoria isoparamétrica convencional. Assume-se que o deslocamento transversal é expresso por

$$w = w_{00} + w_{10}\xi + w_{01}\eta + w_{20}\xi^2 + w_{11}\xi\eta + w_{02}\eta^2 + w_{30}\xi^3 + w_{21}\xi^2\eta + w_{12}\xi\eta^2 + w_{03}\eta^3 \quad (\text{A.1})$$

De acordo com a teoria isoparamétrica aplicada ao elemento quadrilateral de quatro nós e com funções de forma bilineares, as rotações das normais $\theta_y = \partial w / \partial x + \gamma_x$ e $\theta_x = \partial w / \partial y + \gamma_y$ são funções bilineares de ξ e η

$$\theta_y = (\theta_y)_0 + (\theta_y)_{10}\xi + (\theta_y)_{01}\eta + (\theta_y)_{11}\xi\eta \quad (\text{A.2})$$

$$\theta_x = (\theta_x)_0 + (\theta_x)_{10}\xi + (\theta_x)_{01}\eta + (\theta_x)_{11}\xi\eta \quad (\text{A.3})$$

Para o cálculo das curvaturas, tem-se:

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} = \frac{2}{\Delta x} ((\theta_y)_{10} + (\theta_y)_{11}\eta) \quad (\text{A.4})$$

$$\kappa_y = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{2}{\Delta y} \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} = \frac{2}{\Delta y} ((\theta_x)_{10} + (\theta_x)_{11} \xi) \quad (\text{A.5})$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{2}{\Delta y} ((\theta_y)_{10} + (\theta_y)_{11} \xi) + \frac{2}{\Delta x} ((\theta_x)_{10} + (\theta_x)_{11} \eta) \quad (\text{A.6})$$

Pode-se notar que os termos lineares não são independentes e que as condições de dependência podem ser escritas da seguinte forma

$$\frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} \quad (\text{A.7})$$

As condições de compatibilidade de curvatura para uma placa com deformação de cisalhamento nula

$$\frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} \quad (\text{A.8})$$

Embora não assumiremos que as deformações de cisalhamento sejam nulas na forma final do elemento, é verdade, entretanto, que as condições descritas na equação (A.8) são, na maioria dos casos, uma aproximação muito melhor para o estado real de deformação que as da equação (A.7). As condições da equação (A.8) são satisfeitas se a torção usada para computar a energia de deformação for dada por

$$\overline{\kappa_{xy}^g} = 2\kappa_{xy}^g - \kappa_{xy}^0 \quad (\text{A.9})$$

onde κ_{xy}^g é o valor da torção computado pelas equações (A.4), (A.5) e (A.6) no ponto de integração (g), e κ_{xy}^0 é o valor da torção calculada pelas mesmas equações (A.4), (A.5) e (A.6) em $\xi = \eta = 0$. Com essa modificação indicada pela equação (A.9), a energia devido a flexão é computada por integração numérica de Gauss (2x2). Isso resulta em uma deficiência de energia, que é a diferença entre Energia exata E_e e a energia da formulação isoparamétrica E_i .

A.1 Matriz de Rigidez - Flexão

Retomando a equação (4.1), tem-se que para o cálculo da matriz de rigidez devido à flexão

$$\mathbf{K}^b = \int_{\mathbf{A}} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}^b \mathbf{B}^b d\mathbf{A} \quad (\text{A.10})$$

Para o cálculo de \mathbf{B}^b , retoma-se a equação (4.2):

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ 2\kappa_{xy}^g - \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

onde $\partial \theta_y / \partial x$ e $\partial \theta_x / \partial y$ são obtidos a partir da equação (4.8). Para o último termo de \mathbf{B}^b , retoma-se a equação (A.9):

$$\overline{\kappa_{xy}^g} = 2\kappa_{xy}^g - \kappa_{xy}^0 \quad (\text{A.12})$$

onde g é qualquer ponto e 0 é o ponto em que $\xi = \eta = 0$. Assim para o cálculo de κ_{xy}^0 , tem-se que

$$\kappa_{xy}^0 = \frac{\partial \theta_y^0}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x^0}{\partial x} \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\frac{\partial \theta_y^0}{\partial y} = \frac{2}{\Delta y} \left\{ \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{-1}{4} \quad \frac{-1}{4} \right\} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \theta_x^0}{\partial x} = \frac{2}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{4} \quad \frac{-1}{4} \quad \frac{-1}{4} \quad \frac{1}{4} \right\} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Para o cálculo de κ_{xy}^g , onde ξ e η são as coordenadas de um ponto de integração, tem-se que:

$$\begin{aligned} \kappa_{xy}^g = \frac{2}{\Delta y} \left\{ \frac{1+2\xi}{4} \frac{1-2\xi}{4} \frac{-1+2\xi}{4} \frac{-1-2\xi}{4} \right\} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} + \\ + \frac{2}{\Delta x} \left\{ \frac{1+2\eta}{4} \frac{-1-2\eta}{4} \frac{-1+2\eta}{4} \frac{1-2\eta}{4} \right\} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Portanto, para se calcular \mathbf{B}^b basta substituir (4.8), (A.13), (A.14), (A.15) e (A.16) em (A.11).

A.2 Matriz de Rigidez - Cisalhamento

O cálculo da energia exata devido à flexão segundo a teoria de Kirchhoff U_e , baseada na formulação isoparamétrica para elementos de placa [3], é dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}^b \mathbf{B}^b dA \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

em que \mathbf{C}^b é dado por (3.22). Assim, substituindo (3.22) e (A.18) em (A.17), tem-se que

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix}^T \frac{EI}{(1-v^2)} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-v)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix} \det \mathbf{J} dA \quad (\text{A.19})$$

Utilizando os valores de deslocamento descritos na equação (A.1), para o cálculo de dw/dx tem-se que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{2}{\Delta x} [w_{10} + 2\xi w_{20} + \eta w_{11} + 3\xi^2 w_{30} + 2\xi \eta w_{21} + \eta^2 w_{12}] \quad (\text{A.20})$$

Derivando novamente

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{4}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{4}{\Delta x^2} \{2w_{20} + 6\xi w_{30} + 2\eta w_{21} + 2\eta w_{12}\} \quad (\text{A.21})$$

Para o cálculo de $\partial w / \partial y$ tem-se

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2}{\Delta y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} = \frac{2}{\Delta y} \{w_{01} + \xi w_{11} + 2\eta w_{02} + \xi^2 w_{21} + 2\xi \eta w_{12} + 3\eta^2 w_{03}\} \quad (\text{A.22})$$

Derivando novamente

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{4}{\Delta y^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right\} = \frac{4}{\Delta y^2} \{2w_{02} + 2\xi w_{12} + 6\eta w_{03}\} \quad (\text{A.23})$$

Para o cálculo das outras derivadas

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{4}{\Delta y \Delta x} \{w_{11} + 2\xi w_{21} + 2\eta w_{12}\} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{4}{\Delta y \Delta x} \{w_{11} + 2\xi w_{21} + 2\eta w_{12}\} \quad (\text{A.25})$$

Reescrevendo (A.19) com os valores das derivadas, a equação da energia é escrita por

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{\Delta x^2} (2w_{20} + 6\xi w_{30} + 2\eta w_{21}) \\ \frac{4}{\Delta y^2} [2w_{02} + 2\xi w_{12} + 6\eta w_{03}] \\ \frac{4}{\Delta x \Delta y} (2w_{11} + 4\xi w_{21} + 4\eta w_{12}) \end{array} \right\}^T \frac{EI}{(1-v^2)} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-v)}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{\Delta x^2} (2w_{20} + 6\xi w_{30} + 2\eta w_{21}) \\ \frac{4}{\Delta y^2} [2w_{02} + 2\xi w_{12} + 6\eta w_{03}] \\ \frac{4}{\Delta x \Delta y} (2w_{11} + 4\xi w_{21} + 4\eta w_{12}) \end{array} \right\} \det \mathbf{J} dA \quad (\text{A.26})$$

Com o auxílio do programa Mathematica, tem-se que a Energia Exata Teórica é dada por

$$U_e = \frac{16}{3x^3 y^3} \left\{ \begin{array}{l} 6w_{02}^2 x^4 + 18w_{03}^2 x^4 + 2w_{12}^2 x^4 + 3w_{11}^2 x^2 y^2 - 3vw_{11}^2 x^2 y^2 + 4w_{12}^2 x^2 y^2 - \\ 4vw_{12}^2 x^2 y^2 + 12vw_{20}w_{02}x^2 y^2 + 12vw_{03}w_{21}x^2 y^2 + 4w_{21}^2 x^2 y^2 - \\ 4vw_{21}^2 x^2 y^2 + 12vw_{03}w_{21}x^2 y^2 + 6w_{20}^2 y^4 + 2w_{21}^2 y^4 + 18w_{30}^2 y^4 \end{array} \right\} \quad (\text{A.27})$$

Para o cálculo da Energia utilizando a formulação isoparamétrica para placa de Reissner-Mindlin U_i , reescreve-se novamente a equação (A.17) tem-se

$$U_i = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{B}^{\mathbf{bT}} \mathbf{C}^{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} dA \quad (\text{A.28})$$

em que \mathbf{C}^b é dado por (3.22). Para o cálculo de \mathbf{B}^b , utilizando a equação (A.11) tem-se que

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \kappa_{xy}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ 2\kappa_{xy}^g - \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

onde κ_{xy}^g é o valor da torção computado pela equação (A.9) no ponto de integração (g), e κ_{xy}^0 é o valor da torção calculada pela equação (A.9) em $\xi = \eta = 0$. Assim da equação (A.6), tem-se que

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (\text{A.30})$$

Reescrevendo \mathbf{B}^b

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ 2 \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^g - \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Considerando a deformação de cisalhamento nula, conforme a teoria de Kirchhoff,

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{A.32})$$

Substituindo (A.32) em (A.31) tem-se que

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)^g - \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Com base nas equações (A.32) e (A.1), agora procede-se para o cálculo de θ_y e θ_x

$$\begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta x} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{10} + 2\xi w_{20} + \eta w_{11} + 3\xi^2 w_{30} + 2\xi\eta w_{21} + \eta^2 w_{12} \\ w_{01} + \xi w_{11} + 2\eta w_{02} + \xi^2 w_{21} + 2\xi\eta w_{12} + 3\eta^2 w_{03} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Considerando o elemento isoparamétrico da Figura A.1, pode-se calcular os valores de θ_y para os quatro nós do elemento

$$\begin{pmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_y(1,1) \\ \theta_y(-1,1) \\ \theta_y(1,-1) \\ \theta_y(-1,-1) \end{pmatrix} = \frac{2}{\Delta x} \begin{pmatrix} w_{10} + 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} + 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Substituindo (A.35) em (4.3), tem-se que

$$\theta_y = \frac{2}{\Delta x} \left\{ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right\} \begin{pmatrix} w_{10} + 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} + 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Agora pode-se calcular κ_x

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{4}{\Delta x^2} \left\{ \frac{(1+\eta)}{4} \frac{-(1+\eta)}{4} \frac{-(1-\eta)}{4} \frac{(1-\eta)}{4} \right\} \begin{pmatrix} w_{10} + 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} + 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Simplificando tem-se

$$\kappa_x = \frac{1}{\Delta x^2} \{8(w_{20} + \eta w_{21})\} \quad (\text{A.38})$$

Analogamente para θ_x , com o uso da equação (A.34), tem-se que

$$\begin{pmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_x(1,1) \\ \theta_x(-1,1) \\ \theta_x(1,-1) \\ \theta_x(-1,-1) \end{pmatrix} = \frac{2}{\Delta x} \begin{pmatrix} w_{01} + w_{11} + 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} + 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} - 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} + w_{11} - 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Substituindo (A.39) em (4.4)

$$\{\theta_x\} = \frac{2}{\Delta y} \left[\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right] \begin{pmatrix} w_{01} + w_{11} + 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} + 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} - 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} + w_{11} - 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Agora pode-se calcular κ_y

$$\kappa_y = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{4}{\Delta y^2} \left\{ \frac{(1+\xi)}{4} \frac{(1-\xi)}{4} \frac{-(1-\xi)}{4} \frac{-(1+\xi)}{4} \right\} \begin{pmatrix} w_{01} + w_{11} + 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} + 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} - 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} + w_{11} - 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

Simplificando tem-se

$$\kappa_y = \frac{1}{\Delta y^2} \{8(w_{02} + \xi w_{12})\} \quad (\text{A.42})$$

De forma análoga, para o cálculo de κ_{xy} tem-se primeiramente que calcular $\partial \theta_y / \partial y$, com o uso da equação (A.36)

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{4}{\Delta x \Delta y} \left\{ \frac{(1+\xi)}{4} \frac{(1-\xi)}{4} \frac{-(1-\xi)}{4} \frac{-(1+\xi)}{4} \right\} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{pmatrix} w_{10} + 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} + 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Simplificando chega-se a:

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{4}{\Delta x \Delta y} \{4w_{11} + 8\xi w_{21}\}. \quad (\text{A.45})$$

Agora procede-se para o cálculo de $\partial \theta_x / \partial x$, com o uso da equação (A.40)

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{4}{\Delta x \Delta y} \left\{ \frac{(1+\eta)}{4} \frac{-(1+\eta)}{4} \frac{-(1-\eta)}{4} \frac{(1-\eta)}{4} \right\} \begin{pmatrix} w_{01} + w_{11} + 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} + 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} - 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} + w_{11} - 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Simplificando obtém-se

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} [4w_{11} + 8\eta w_{12}] \quad (\text{A.47})$$

Finalmente para o cálculo de κ_{xy}

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{4}{\Delta x \Delta y} [8w_{11} + 8\eta w_{12} + 8\xi w_{21}] \quad (\text{A.48})$$

Conforme descrito na equação (A.9) tem-se

$$\overline{\kappa_{xy}^g} = 2\kappa_{xy}^g - \kappa_{xy}^0 \quad (\text{A.49})$$

Sendo que

$$\kappa_{xy}^0 = \kappa_{xy}(\eta = \xi = 0) = \left(\frac{1}{\Delta x \Delta y} \right) \{8w_{11}\} \quad (\text{A.50})$$

O que permite escrever,

$$\begin{aligned} \overline{\kappa_{xy}^g} &= 2 \left(\frac{1}{\Delta x \Delta y} \right) \{8w_{11} + 8\eta w_{12} + 8\xi w_{21}\} - \left(\frac{1}{\Delta x \Delta y} \right) \{8w_{11}\} = \\ &= \left(\frac{8}{\Delta x \Delta y} \right) \{w_{11} + 2\eta w_{12} + 2\xi w_{21}\} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Assim para o cálculo de \mathbf{B}^b

$$\mathbf{B}^b = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ 2\kappa_{xy}^g - \kappa_{xy}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{8}{\Delta x^2} \right) (w_{20} + \eta w_{21}) \\ \left(\frac{8}{\Delta y^2} \right) (w_{02} + \xi w_{12}) \\ \left(\frac{8}{\Delta x \Delta y} \right) (w_{11} + 2\eta w_{12} + 2\xi w_{21}) \end{array} \right\} \quad (\text{A.52})$$

Substituindo os valores de \mathbf{B}^b em (A.28), tem-se que

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{8}{\Delta x^2} \right) (w_{20} + \eta w_{21}) \\ \left(\frac{8}{\Delta y^2} \right) (w_{02} + \xi w_{12}) \\ \left(\frac{8}{\Delta x \Delta y} \right) (w_{11} + 2\eta w_{12} + 2\xi w_{21}) \end{array} \right\}^T \frac{EI}{(1-v^2)} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-v)}{2} \end{bmatrix} \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{8}{\Delta x^2} \right) (w_{20} + \eta w_{21}) \\ \left(\frac{8}{\Delta y^2} \right) (w_{02} + \xi w_{12}) \\ \left(\frac{8}{\Delta x \Delta y} \right) (w_{11} + 2\eta w_{12} + 2\xi w_{21}) \end{array} \right\} \det \mathbf{J} dA \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Com o auxílio do programa Mathematica, calculou-se a energia usando a formulação isoparamétrica, e o resultado é

$$U_i = \frac{16}{3x^3y^3} \left\{ \begin{aligned} &6w_{02}^2x^4 + 2w_{12}^2x^4 + 3w_{11}^2x^2y^2 - 3vw_{11}^2x^2y^2 + 4w_{12}^2x^2y^2 - \\ &4vw_{12}^2x^2y^2 + 12vw_{20}w_{02}x^2y^2 + 4w_{21}^2x^2y^2 - 4vw_{21}^2x^2y^2 - \\ &+ 6w_{20}^2y^4 + 2w_{21}^2y^4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.54})$$

Conforme anteriormente calculado (A.55), a energia exata é

$$U_e = \frac{16}{3x^3y^3} \left\{ \begin{aligned} &6w_{02}^2x^4 + 18w_{03}^2x^4 + 2w_{12}^2x^4 + 3w_{11}^2x^2y^2 - 3vw_{11}^2x^2y^2 + 4w_{12}^2x^2y^2 - \\ &4vw_{12}^2x^2y^2 + 12vw_{20}w_{02}x^2y^2 + 12vw_{03}w_{21}x^2y^2 + 4w_{21}^2x^2y^2 - \\ &4vw_{21}^2x^2y^2 + 12vw_{03}w_{21}x^2y^2 + 6w_{20}^2y^4 + 2w_{21}^2y^4 + 18w_{30}^2y^4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.55})$$

Assim, a diferença entre a energia exata e da formulação isoparamétrica U_d é

$$U_d = U_e - U_i = \frac{EI\Delta x\Delta y}{(1-v^2)} \left\{ \frac{96w_{30}^2}{\Delta x^4} + \frac{96w_{03}^2}{\Delta y^4} + \frac{64v}{\Delta x^2\Delta y^2} (w_{30}w_{12} + w_{03}w_{21}) \right\} \quad (\text{A.56})$$

Os termos w_{30}^2 e w_{03}^2 são corrigidos pela introdução da “Flexibilidade Residual de Flexão” (*Residual Bending Flexibility*). O termo proporcional ao coeficiente de Poisson não é corrigível.

Os pontos de integração para o cisalhamento devem ser selecionados cuidadosamente. Dois pontos são selecionados em $\pm 1/(\sqrt{3})$ como mostrado na Figura A.1, de forma a obter a energia de deformação correta para a variação linear de γ_x na direção η . As deformações de cisalhamento nos pontos de integração são relacionadas com os componentes de movimento nos pontos (j) pela equação

$$\{\gamma_s\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_x^a \\ \gamma_x^b \\ \gamma_y^c \\ \gamma_y^d \end{array} \right\} = [\mathbf{B}^s] \left\{ \begin{array}{c} w_j \\ \theta_y^j \\ \theta_x^j \end{array} \right\} \quad (\text{A.57})$$

onde $[\mathbf{D}_j]$ é avaliado através da função de forma, N_j , e suas derivadas, N_{xj} e N_{yj} pela equação

$$[\mathbf{B}^s] = \begin{bmatrix} N_{xj}^a & -N_j^a & 0 \\ N_{xj}^b & -N_j^b & 0 \\ N_{yj}^c & 0 & -N_j^c \\ N_{yj}^d & 0 & -N_j^d \end{bmatrix} \quad (\text{A.58})$$

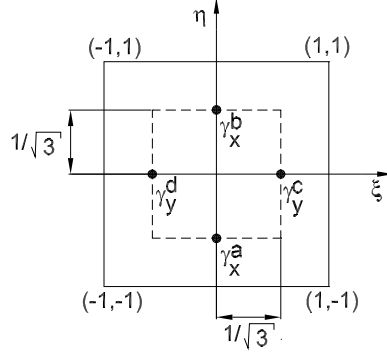


Figura A.1: Posição dos pontos de integração para cálculo do cisalhamento

onde os sobrescritos identificam os pontos na Figura A.1 em que os termos são avaliados. Os subscritos x e y indicam a derivação das funções de forma \mathbf{N} com relação a x e y respectivamente. Para o cálculo das derivadas de w com relação a x e y , basta retomar a equação (4.97). As derivadas são calculadas em 4 pontos: A, B, C e D.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w^A}{\partial x} \\ \frac{\partial w^B}{\partial x} \\ \frac{\partial w^C}{\partial x} \\ \frac{\partial w^D}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\Delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)^A}{4} & \frac{-(1+\eta)^A}{4} & \frac{-(1-\eta)^A}{4} & \frac{(1-\eta)^A}{4} \\ \frac{(1+\eta)^B}{4} & \frac{-(1+\eta)^B}{4} & \frac{-(1-\eta)^B}{4} & \frac{(1-\eta)^B}{4} \\ \frac{(1+\xi)^C}{4} & \frac{(1-\xi)^C}{4} & \frac{-(1-\xi)^C}{4} & \frac{-(1+\xi)^C}{4} \\ \frac{(1+\xi)^D}{4} & \frac{(1-\xi)^D}{4} & \frac{-(1-\xi)^D}{4} & \frac{-(1+\xi)^D}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

Para o cálculo de w nos quatro pontos utiliza-se a equação (A.1), assim tem-se que

$$w = w_{00} + w_{10}\xi + w_{01}\eta + w_{20}\xi^2 + w_{11}\xi\eta + w_{02}\eta^2 + w_{30}\xi^3 + w_{21}\xi^2\eta + w_{12}\xi\eta^2 + w_{03}\eta^3 \quad (\text{A.60})$$

O que permite escrever,

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(1,1) \\ w(-1,1) \\ w(1,-1) \\ w(-1,-1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{00} + w_{10} + w_{01} + w_{20} + w_{11} + w_{02} + w_{30} + w_{21} + w_{12} + w_{03} \\ w_{00} - w_{10} + w_{01} + w_{20} - w_{11} + w_{02} - w_{30} + w_{21} - w_{12} + w_{03} \\ w_{00} - w_{10} - w_{01} + w_{20} + w_{11} + w_{02} - w_{30} - w_{21} - w_{12} - w_{03} \\ w_{00} + w_{10} - w_{01} + w_{20} - w_{11} + w_{02} + w_{30} - w_{21} + w_{12} - w_{03} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.61})$$

Substituindo as equações (A.61) em (A.59), tem-se que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w^A}{\partial x} \\ \frac{\partial w^B}{\partial x} \\ \frac{\partial w^C}{\partial x} \\ \frac{\partial w^D}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\Delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)^A}{4} & \frac{-(1+\eta)^A}{4} & \frac{-(1-\eta)^A}{4} & \frac{(1-\eta)^A}{4} \\ \frac{(1+\eta)^B}{4} & \frac{-(1+\eta)^B}{4} & \frac{-(1-\eta)^B}{4} & \frac{(1-\eta)^B}{4} \\ \frac{(1+\xi)^C}{4} & \frac{(1-\xi)^C}{4} & \frac{-(1-\xi)^C}{4} & \frac{-(1+\xi)^C}{4} \\ \frac{(1+\xi)^D}{4} & \frac{(1-\xi)^D}{4} & \frac{-(1-\xi)^D}{4} & \frac{-(1+\xi)^D}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_{00} + w_{10} + w_{01} + w_{20} + w_{11} + w_{02} + w_{30} + w_{21} + w_{12} + w_{03} \\ w_{00} - w_{10} + w_{01} + w_{20} - w_{11} + w_{02} - w_{30} + w_{21} - w_{12} + w_{03} \\ w_{00} - w_{10} - w_{01} + w_{20} + w_{11} + w_{02} - w_{30} - w_{21} - w_{12} - w_{03} \\ w_{00} + w_{10} - w_{01} + w_{20} - w_{11} + w_{02} + w_{30} - w_{21} + w_{12} - w_{03} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.62})$$

Para o cálculo de θ_y tem-se, conforme desenvolvido anteriormente em (A.36)

$$\theta_y = \frac{2}{\Delta x} \left\{ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right\} \begin{Bmatrix} w_{10} + 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} + 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

Para o cálculo de θ_x , conforme desenvolvido anteriormente em (A.40), obtém-se

$$\theta_x = \frac{2}{\Delta y} \left\{ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \right\} \begin{Bmatrix} w_{01} + w_{11} + 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} + 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} - 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} + w_{11} - 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.64})$$

Matricialmente, e substituindo as equações em (A.63), (A.64) e (A.62) em (A.58), tem-se que as colunas 1, 2, 3 e 4 de \mathbf{B}^s são dados por

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\eta)^A}{4} & \frac{2}{\Delta x} \frac{-(1+\eta)^A}{4} & \frac{2}{\Delta x} \frac{-(1-\eta)^A}{4} & \frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\eta)^A}{4} \\ \frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\eta)^B}{4} & \frac{2}{\Delta x} \frac{-(1+\eta)^B}{4} & \frac{2}{\Delta x} \frac{-(1-\eta)^B}{4} & \frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\eta)^B}{4} \\ \frac{2}{\Delta y} \frac{(1+\xi)^C}{4} & \frac{2}{\Delta y} \frac{(1-\xi)^C}{4} & \frac{2}{\Delta y} \frac{-(1-\xi)^C}{4} & \frac{2}{\Delta y} \frac{-(1+\xi)^C}{4} \\ \frac{2}{\Delta y} \frac{(1+\xi)^D}{4} & \frac{2}{\Delta y} \frac{(1-\xi)^D}{4} & \frac{2}{\Delta y} \frac{-(1-\xi)^D}{4} & \frac{2}{\Delta y} \frac{-(1+\xi)^D}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.65})$$

As colunas 5, 6, 7 e 8 de \mathbf{B}^s são dadas por

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\xi)(1+\eta)^A}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\xi)(1+\eta)^A}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\xi)(1-\eta)^A}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\xi)(1-\eta)^A}{4} \\ -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\xi)(1+\eta)^B}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\xi)(1+\eta)^B}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\xi)(1-\eta)^B}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\xi)(1-\eta)^B}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.66})$$

As colunas 9, 10, 11 e 12 de \mathbf{B}^s são dadas por

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\xi)(1+\eta)^A}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\xi)(1+\eta)^A}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\xi)(1-\eta)^A}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\xi)(1-\eta)^A}{4} \\ -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\xi)(1+\eta)^B}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\xi)(1+\eta)^B}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1-\xi)(1-\eta)^B}{4} & -\frac{2}{\Delta x} \frac{(1+\xi)(1-\eta)^B}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.67})$$

Tendo w_j , θ_y^j e θ_x^j pode-se calcular as variáveis nodais

$$\begin{Bmatrix} w^j \\ \theta_y^j \\ \theta_x^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{00} + w_{10} + w_{01} + w_{20} + w_{11} + w_{02} + w_{30} + w_{21} + w_{12} + w_{03} \\ w_{00} - w_{10} + w_{01} + w_{20} - w_{11} + w_{02} - w_{30} + w_{21} - w_{12} + w_{03} \\ w_{00} - w_{10} - w_{01} + w_{20} + w_{11} + w_{02} - w_{30} - w_{21} - w_{12} - w_{03} \\ w_{00} + w_{10} - w_{01} + w_{20} - w_{11} + w_{02} + w_{30} - w_{21} + w_{12} - w_{03} \\ w_{10} + 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} + w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} - 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} + 2w_{21} + w_{12} \\ w_{10} + 2w_{20} - w_{11} + 3w_{30} - 2w_{21} + w_{12} \\ w_{01} + w_{11} + 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} + 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} - w_{11} - 2w_{02} + w_{21} + 2w_{12} + 3w_{03} \\ w_{01} + w_{11} - 2w_{02} + w_{21} - 2w_{12} + 3w_{03} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.68})$$

Finalmente, retorna-se à equação (A.58), em que todos os parâmetros já foram obtidos. Multiplicando as matrizes acima com o auxílio do Mathematica, temos o seguinte resultado para o caso especial para um elemento retangular:

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi z} &= -\frac{4}{\Delta x} (w_{20}\xi + w_{21}\xi\eta + w_{30}) \\ \gamma_{\eta z} &= -\frac{4}{\Delta y} (w_{02}\xi + w_{12}\xi\eta + w_{03}) \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Os termos proporcionais a ξ , η e $\xi\eta$ desaparecem nos pontos de integração. Os termos proporcionais a w_{30} e w_{03} são usados para corrigir os termos w_{30}^2 e w_{03}^2 na deficiência de energia devido à flexão na equação (A.56). Retomando a equação (3.19) a matriz de rigidez devido ao cisalhamento é escrita como

$$\mathbf{K}^s = (\mathbf{B}^s)^T (\mathbf{Z}^s + \mathbf{Z}^b)^{-1} \mathbf{B}^s \quad (\text{A.70})$$

em que a matriz \mathbf{C}^s foi substituída por $(\mathbf{Z}^s + \mathbf{Z}^b)^{-1}$, onde \mathbf{Z}^s é a matriz da flexibilidade devido ao cisalhamento e \mathbf{Z}^b é a *Matriz da Flexibilidade Residual da Flexão (Residual Bending*

Flexibility). No caso de $[Z^s]$, o efeito do volume é tratado por pré e pós multiplicadores diagonais, assim

$$\mathbf{Z}^s = (\mathbf{V}^s)^{-1} \mathbf{G}^{s-1} (\mathbf{V}^s)^{-1} \quad (\text{A.71})$$

onde

$$\mathbf{V}^s = \begin{bmatrix} \sqrt{2J_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2J_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2J_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2J_d} \end{bmatrix} \quad (\text{A.72})$$

onde \mathbf{J}_a é o jacobiano bi-dimensional no ponto (A). Para um elemento retangular, $\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_b = \mathbf{J}_c = \mathbf{J}_d = \Delta x \Delta y / 4$. O fator extra de dois sob o radical ocorre porque há somente dois pontos de integração para cada componente de deformação ao invés de quatro. Para materiais isotrópicos:

$$\mathbf{G}^s = \begin{bmatrix} G_{11}^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{11}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{22}^s \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

onde $G_{11}^s = G_{22}^s = E h k / 2 (1 + \nu)$. A matriz de flexibilidade residual de flexão é

$$\mathbf{Z}^b = \frac{1}{12.A.I_o} \cdot \begin{bmatrix} \frac{(1+a)\Delta x^2}{E_{11}} & \frac{(1+a)\Delta x^2}{E_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{(1+a)\Delta x^2}{E_{11}} & \frac{(1+a)\Delta x^2}{E_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+b)\Delta x^2}{E_{11}} & \frac{(1-b)\Delta x^2}{E_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{(1-b)\Delta x^2}{E_{11}} & \frac{(1+b)\Delta x^2}{E_{11}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.74})$$

onde A é a área da superfície do elemento, I_o é o momento de inércia de flexão por unidade de largura; $\Delta x = 0,5(x_2 + x_3 - x_1 - x_4)$; $\Delta y = 0,5(y_3 + y_4 - y_1 - y_2)$ e E_{11} e E_{22} são os termos da diagonal na matriz de elasticidade usados para avaliar a rigidez a flexão. Para materiais isotrópicos $E_{11} = E_{22} = E / (1 - \nu^2)$. Os coeficientes (a) e (b) foram obtidos através de experimentação numérica

$$a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}} \quad b = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \quad (\text{A.75})$$

sendo que $\varepsilon = 0,04$, também obtido através de experimentação numérica.